

Spis treści

Wstęp	1
I Prawdopodobieństwo	3
1 Elementy rachunku prawdopodobieństwa	4
1.1 Schemat klasyczny	4
1.2 Niezależność zdarzeń	8
1.3 Schemat Bernoulliego	9
1.4 Prawdopodobieństwo warunkowe	11
1.5 Prawdopodobieństwo całkowite	11
1.6 Wzór Bayesa	13
2 Zmienna losowa	15
2.1 Zmienna losowa typu skokowego	16
2.2 Zmienna losowa typu ciągłego	18
3 Dystrybuanta zmiennej losowej	22
4 Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej	29
4.1 Wartość oczekiwana	29
4.2 Kwantyle	30
4.3 Wariancja i odchylenie standardowe	34
4.4 Odchylenie ćwiartkowe	35
4.5 Momenty zwykłe i centralne	36
4.6 Współczynnik skośności	36
4.7 Kurtoza	37
4.8 Współczynnik zmienności	37
5 Zmienna losowa dwuwymiarowa	43

5.1	Dwuwymiarowa zmienna losowa typu skokowego	43
5.2	Dwuwymiarowa zmienna losowa typu ciągłego	45
5.3	Rozkłady brzegowe zmiennych losowych typu ciągłego	48
5.4	Dystrybuanta rozkładu brzegowego zmiennej losowej ciągłej	48
5.5	Niezależność zmiennych losowych	50
5.6	Dwuwymiarowa wartość oczekiwana	52
5.7	Kowariancja zmiennych losowych	52
5.8	Współczynnik korelacji	54
6	Przegląd wybranych rozkładów zmiennej losowej	55
6.1	Rozkłady skokowe	56
6.1.1	Rozkład jednopunktowy	56
6.1.2	Rozkład dwupunktowy	56
6.1.3	Rozkład równomierny	57
6.1.4	Rozkład Bernoulliego	57
6.1.5	Rozkład Poissona	57
6.1.6	Rozkład geometryczny	58
6.2	Rozkłady ciągłe	58
6.2.1	Rozkład jednostajny	58
6.2.2	Rozkład normalny	60
6.2.3	Rozkład gamma	70
6.2.4	Rozkład wykładniczy	71
6.2.5	Rozkład chi-kwadrat	72
6.2.6	Rozkład Studenta	75
6.2.7	Rozkład Fishera-Snedecora	77
6.3	Dwuwymiarowy rozkład normalny	78
II	Statystyka	81
7	Wprowadzenie do zagadnień statystyki	82
7.1	Podstawowe pojęcia statystyki	82
7.2	Rodzaje badań statystycznych	84
7.3	Etapy badania statystycznego	85
7.4	Porządkowanie materiału statystycznego	89
7.4.1	Szereg szczegółowy prosty	89
7.4.2	Szereg rozdzielczy punktowy	90
7.4.3	Szereg rozdzielczy przedziałowy	90

7.5	Dystrybuanta empiryczna	93
7.6	Prezentacja graficzna szeregów statystycznych	95
8	Analiza danych statystycznych	98
8.1	Średnia arytmetyczna próbki	99
8.2	Dominanta (moda, wartość modalna) próbki	100
8.3	Kwartyle próbki	100
8.4	Wariancja próbki	103
8.5	Odchylenie standardowe próbki	104
8.6	Odchylenie ćwiartkowe próbki	105
8.7	Współczynnik zmienności próbki	106
9	Estymacja przedziałowa	108
9.1	Wnioskowanie statystyczne	108
9.2	Parametr i estymator	109
9.3	Estymacja przedziałowa parametrów rozkładu cechy	111
9.4	Przedziały ufności dla wartości oczekiwanej	112
9.5	Wyznaczanie minimalnej liczności próby niezbędnej do uzyskania przedziału ufności o zadanej długości	116
9.6	Przedziały ufności dla wariancji i odchylenia standardowego	119
9.7	Przedziały ufności dla frakcji	123
9.8	Podsumowanie	124
10	Weryfikacja hipotez statystycznych	126
10.1	Rodzaje hipotez	126
10.2	Błędy I i II rodzaju	128
10.3	Statystyka testowa i zbiór krytyczny	129
10.4	Moc testu	130
10.5	Poziom prawdopodobieństwa p	130
10.6	Procedura testu istotności	131
11	Parametryczne testy istotności dla jednej populacji	133
11.1	Testy dla wartości oczekiwanej	133
11.2	Testy dla wariancji	139
11.3	Testy dla frakcji	141
12	Parametryczne testy istotności dla dwóch populacji	144
12.1	Testy dla dwóch wariancji	146
12.2	Testy dla dwóch wartości oczekiwanych	148

12.2.1	Próby niezależne	148
12.2.2	Próby zależne (zmienne połączone)	154
12.3	Testy dla dwóch frakcji	156
13	Weryfikacja hipotez nieparametrycznych	159
13.1	Testy zgodności	159
13.1.1	Test zgodności chi-kwadrat Pearsona	159
13.1.2	Test Shapiro-Wilka	162
13.2	Test niezależności chi-kwadrat	165
14	Korelacja i regresja liniowa dla próby dwuwymiarowej	170
14.1	Opracowanie danych statystycznych	171
14.2	Badanie zależności między cechami	172
14.3	Mierniki współzależności cech	175
14.3.1	Kowariancja	175
14.3.2	Współczynnik korelacji liniowej Pearsona	176
14.3.3	Współczynnik determinacji	180
14.4	Prosta regresji	180
14.5	Podsumowanie	185
15	Zadania	189
16	Odpowiedzi do zadań	196
	Bibliografia	199

Wstęp

Znaczenie metod statystycznych w naukach przyrodniczych i technicznych systematycznie wzrasta. Znajomość podstawowych technik statystyki opisowej i matematycznej jest niezbędnym elementem wykształcenia absolwenta uczelni wyższej, nie tylko technicznej. Opracowanie zebranych danych i wyciągnięcie wniosków z przeprowadzonych obliczeń jest integralną częścią wielu badań, publikacji naukowych, a także prac dyplomowych z obszaru niemal wszystkich dyscyplin badawczych.

Niniejszy podręcznik został przygotowany z myślą o studentach, głównie uczelni technicznych, ale może być wykorzystywany przez wszystkie zainteresowane osoby do samodzielnego opracowywania danych doświadczalnych. W zwięzły sposób przedstawiono w nim podstawowe zagadnienia rachunku prawdopodobieństwa oraz statystyki opisowej i matematycznej. Ze względu na głównie praktyczne jego przeznaczenie, niezbędną teorię przedstawiono tak, by korzystanie z książki nie wymagało pogłębionej wiedzy matematycznej. Wszystkie wprowadzone pojęcia zostały zilustrowane przykładami i rozwiązanymi zadaniami. Powinno to ułatwić Czytelnikowi zrozumienie omawianych zagadnień i wykorzystanie ich we własnej pracy.

Podręcznik nie zawiera tablic statystycznych. W rozwiązaniach zadań wykorzystano tablice znajdujące się w [4] (część 2).

Ze względu na powszechność wykorzystania komputerów przy opracowywaniu danych statystycznych, część przykładów została rozwiązana przy pomocy programu R. Rysunki również zostały wykonane z użyciem tego programu. R jest bardzo funkcjonalnym, niekomercyjnym narzędziem przeznaczonym do zaawansowanych obliczeń statystycznych. Jest szeroko stosowany w uczelniach wyższych na świecie i systematycznie rozwijany, głównie

przez społeczność akademicką. Szczegółowe informacje o sposobie instalacji oraz o pracy z programem R można znaleźć w pozycji [1] oraz na stronie <https://cran.r-project.org/>.

Pliki z danymi do wybranych zadań (w formacie `nazwa.csv`) znajdują się pod adresem `cmf.p.lodz.pl` w zakładce Podręczniki.

Autorki serdecznie dziękują dr. Andrzejowi Justowi, prof. PŁ, Dyrektorowi Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki PŁ, za nieustającą życzliwość i wsparcie w trakcie pracy nad podręcznikiem.