Spis treści

Wstęp

Pomysł i szczegółowa koncepcja prezentowanej publikacji „Wybrane konstrukcje matematyki teoretycznej...” są wynikiem obserwacji stanu wiedzy niezbyt licznej grupy studentów matematyki studiów doktoranckich prowadzonych od 2012 r. na Wydziale FTIMS Politechniki Łódzkiej. Absolwenci matematyki, po studiach z różnych uczelni, prezentują na ogół dość zaawansowaną wiedzę dotyczącą z zasady wąskich dyscyplin matematyki, pojmowanych jako odrębne i właściwie niezależne – niepowiązane w istotny sposób ze sobą. Zasadniczym celem pracy jest zatem pokazanie czytelnikowi wzajemnego przenikania wybranych, wskazanych w tytule działów matematyki, lokujących się w pobliżu szeroko pojętej analizy matematycznej. Topologia, teoria miary i całki, a także rachunek prawdopodobieństwa na średnio zaawansowanym poziomie stanowią w ramach matematyki na studiach politechnicznych dość kłopotliwy materiał wykładowy: dwie pierwsze dyscypliny – ze względu na wymagany właściwy poziom abstrakcji, natomiast probabilistyka – z uwagi na wyraźną i pilną potrzebę zastosowań, co skutkuje istotnymi uproszczeniami w zakresie teorii.

Niżej podpisany zakłada, że czytelnik zetknął się w ramach standardowego kursu z podstawowymi pojęciami i twierdzeniami omawianej teorii, a w prezentowanym tekście dostrzeże precyzyjny układ twierdzeń i definicji skracających lub upraszczających „ścieżkę dostępu” do klasycznych, bardziej zaawansowanych wyników. Przykłady takiego podejścia czytelnik znajdzie w rozdziale 1 – dla miary Lebesgue’a oraz w rozdziale 3 dla całki Lebesgue’a względem dowolnej miary. Miara Lebesgue’a na prostej jest zatem zdefiniowana jako uzupełnienie jedynej miary borelowskiej, która odcinkom przypisuje ich długość. Definicja jest tu oczywiście połączona z twierdzeniem o istnieniu i jednoznaczności takiej miary, a rozumowanie i szczegóły konstrukcyjne wykorzystane w dowodzie stanowią w kolejnym podrozdziale podstawę dla wprowadzenia twierdzenia Carathéodory'ego, mającego przecież dużo szersze znaczenie w konstrukcji miar. Dla odmiany tradycyjnie definiowana całka Lebegue'a jest z reguły wynikiem kilkuetapowego procesu konstrukcji, której CEL czytelnik poznaje dopiero poprzez własności *tego, co powstało*.

Zgodnie z tytułem, kolejne rozdziały i podrozdziały podręcznika koncentrują się na prezentacji szeregu *konstrukcji*, poczynając od funkcji rzeczywistych, których istnienie postulują lemat Urysohna i twierdzenie Tietzego, a kończąc na twierdzeniu Riesza o dualności w przestrzeniach L^p. Przygotowywane równolegle opracowanie „Konstrukcje II..." [5] zaczyna się od twierdzenie Radona–Nikodyma, a kończy na ruchach Browna oglądanych także z perspektywy miary Wienera w przestrzeni funkcji ciągłych $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$. Celowo zostały pominięte w tym cyklu związki pomiędzy topologią i algebrą, stanowiące podstawy *Topologii Algebraicznej*, gdyż znalazły one swoje rozwinięcie w osobnej pracy, opublikowanej wcześniej [3].

Rozdział 1 grupuje przestrzenie omawiane w dalszych częściach niniejszego opracowania i ma na celu ustalenie terminologii i przyjętych oznaczeń. Przypomniano podstawy topologii i przestrzeni metrycznych, zatrzymując się w szczególności przy aproksymacji funkcji max i min w podprzestrzeniach funkcji ciągłych i ograniczonych oraz przy charakteryzacji zupełności przestrzeni unormowanych poprzez zbieżność szeregów. Podrozdział 1.2 obejmuje własności przestrzeni mierzalnych i ich odwzorowań. Przedstawiono tu naturalne etapy konstrukcji $\sigma-$ciała generowanego przez rodzinę zbiorów, w tym szczegóły zależności pomiędzy $\sigma-$ciałami i $\sigma-$pierścieniami (oraz wprowadzonymi przez autora $\delta-$pierścieniami).

Kolejny podrozdział dotyczy miar borelowskich i obejmuje charakteryzację oraz konstrukcję miary Lebesgue'a na prostej, a także jawny opis bijekcji pomiędzy skończonymi miarami borelowskimi w $\mathbb{R}$ i ich uogólnionymi dystrybuantami. Tematyka miar borelowskich jest rozwijana w podrozdziale 1.4, gdzie badany jest problem jednoznaczności rozszerzenia miary, a także regularność i pojęcie słabej zbieżności skończonych miar w przestrzeniach metrycznych. Twierdzenie Carathéodory'ego sformułowane jest w podrozdziale 1.5. Zamiast przytaczać dostępny powszechnie w literaturze dowód, autor koncentruje się na ważnym przypadku rozszerzenia miary zdefiniowanej wcześniej na danym półpierścieniu, co w szczególności prowadzi do twierdzenia Hahna–Kołmogorowa.

Ostatni podrozdział rozdziału 1 zwraca się ponownie ku topologii i kieruje uwagę czytelnika na szczególne własności przestrzeni zwartych i lokalnie zwartych. Klasyczne twierdzenie Stone'a–Weierstrassa zostało sformułowane i dowiedzione w wersji rozszerzonej, z której bezpośrednio wynika charakteryzacja topologii przestrzeni zwartej przez strukturę algebry funkcji ciągłych, znana jako twierdzenie Gelfanda–Kołmogorowa. Analogiczne własności przestrzeni lokalnie zwartych autor wyprowadza, korzystając z uzwarcenia Aleksandrowa. Cykl konstrukcji dotyczących przestrzeni lokalnie zwartych kończy charakteryzacja ośrodkowych przestrzeni metryzowalnych, pojęcie rozkładu jedności oraz wprowadzenie $\sigma-$pierścienia zbiorów Baire'a.

Podobne pojęcia produktu przestrzeni topologicznych i przestrzeni mierzalnych, wychodzące z teorii mnogości, znajdują wspólny opis w rozdziale 2 w ramach teorii kategorii. Kategorie dostarczają także czytelnego kontekstu dla pojęcia podprzestrzeni oraz dla uzupełnienia przestrzeni metrycznej. Specyfika omawianych tu pojęć w każdej z rozważanych kategorii stanowi treść podrozdziału 2.2, gdzie w szczególności zostało wykazane twierdzenie Tichonowa o produkcie przestrzeni zwartych.

Podrozdział 2.3 zawiera charakteryzację miary produktowej oraz szczegółowy dowód twierdzenia o istnieniu (i jednoznaczności) produktu skończonej liczby *dowolnych* miar – bez klasycznego w tym kontekście założenia $\sigma-$skończoności. Dla miar probabilistycznych rozszerzono konstrukcję na dowolną rodzinę miar, przy czym pełny dowód istnienia – bez jakichkolwiek ograniczeń na przestrzenie mierzalne – kończy się dopiero w rozdziale 3, gdzie autor korzysta z własności całki Lebesgue'a.

Kolejne podrozdziały koncentrują się na topologii i zawierają charakteryzację homeomorfizmów danej przestrzeni topologicznej na podprzestrzeń produktu kartezjańskiego, co prowadzi do włożenia dowolnej przestrzeni Tichonowa w zbiór zwarty będący stosowną potęgą (produktem) odcinka jednostkowego. Wychodząc od otrzymanego w ten sposób uzwarcenia Čecha–Stone'a autor zmierza następnie – z pomocą twierdzenia Stone'a–Weierstrassa – w stronę charakteryzacji wszystkich możliwych uzwarceń przestrzeni Tichonowa. Rozdział kończy odrębna, nieco uproszczona konstrukcja Wallmana korzystająca z uniwersalnego charakteru maksymalnego uzwarcenia.

Rozdział 3 obejmuje aksjomatyczną charakteryzację całki Lebesgue'a, w której klasyczna konstrukcja całki jest częścią *dowodu istnienia*. Oczywiste – w tym kontekście – twierdzenie o zamianie zmiennych zostało uzupełnione o jawną postać dla dyfeomorfizmu i całki względem miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$. Podrozdział 3.1.5 zawiera sformułowanie i dowód ogólnego twierdzenia Fubiniego–Tonellego dla całki względem produktu miar. Kolejny podrozdział zawiera także dowód zupełności przestrzeni L^p – funkcji całkowalnych z $p-$tą potęgą, dla $p \geqslant 1$ wprowadzenie do dualności.

Życzę uważnej lektury – Grzegorz Andrzejczak.

Łódź - Sokolniki, kwiecień 2018 – luty 2020