Spis treści

WSTĘP

Książka ta powstała w oparciu o wieloletnie wykłady z geometrii analitycznej prowadzone dla studentów pierwszego roku na kierunku matematyka semestru letniego w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej przez Jana Kubarskiego, do których ćwiczenia prowadził Bogdan Balcerzak.

W starożytności (już w III tys. p.n.e.) w Egipcie i Mezopotamii dokonywano pomiarów pól powierzchni gruntów i objętości zbóż przechowywanych w spichrzach. Mierzone kształty były różne – nie tylko prostokątne, prostopadłościenne, ale też pryzmy, ścięte ostrosłupy i inne. Tak się zrodziła praktyczna geometria. Początki matematyki jako nauki – szczególnie geometrii – pojawiają się w XIX w. p.n.e.: a) Mezopotamia – tabliczki gliniane, w tym najsłynniejsza tabliczka Plimptona 322 z układem piętnastu trójek pitagorejskich znaleziona w Larsie (starożytne Senkereh) datowana około roku 1800 p.n.e., b) Egipt – papirus Rhinda z zadaniami geometrycznymi na objętość spichrzów/silosów do gromadzenia zboża znaleziony w Luxorze i przepisany przez Ahmesa w okresie panowania faraona Apophisa-Auserre (1585-1542) z XV dynastii hyksockiej z około 200 lat starszego niezachowanego oryginału napisanego w okresie panowania XII dynastii. Przez następne 1000 lat nic znaczącego w matematyce nie odkryto.

W Grecji od Talesa (ur. ok. 620 p.n.e.; zm. ok. 547 p.n.e., Milet) do Euklidesa (ur. ok. 365 r. p.n.e., zm. ok. 300 r. p.n.e.) rozwinęła się geometria jako samodzielny przedmiot dociekań naukowych. Talesowi przypisuje się, oprócz twierdzenia znanego do dziś jego imieniem (o proporcjonalności odcinków, na które podzielone zostały ramiona kąta przez dwie proste równoległe), także szereg innych twierdzeń, np. że średnica koła jest widoczna z punktu leżącego na okręgu pod kątem prostym, oraz bardzo ważne spostrzeżenie, które jest równoważne z Postulatem V Euklidesa zaprezentowanym niżej:

– *dla dwu danych ustawionych pod kątem prostym odcinków a, b mających wspólny wierzchołek istnieje* (*i to tylko jeden*) *prostokąt o bokach a i b*: *tzn. odkładając z pozostałych wierzchołków odcinki a i b tak, aby dwa odcinki a i dwa odcinki b leżały naprzeciw siebie, otrzyma się czworokąt, w którym pozostałe kąty są proste.*

W okresie od Talesa do Euklidesa sformułowano szereg twierdzeń, takich jak np.: o kącie zewnętrznym trójkąta, o kątach środkowych, wpisanych i dopisanych w okręgu. W tym czasie pojawiło się twierdzenie Pitagorasa, powstała także teoria podzielności (Teajtet, ur. ok. 410 p.n.e.; zm. ok. 368 p.n.e.), a problemy delijskie (podwojenia sześcianu, kwadratura koła, trysekcja kąta; V w. p.n.e.) doprowadziły do powstania podstaw konstrukcji geometrycznych, odkryto wszystkie wielościany foremne (zwane też platońskimi). Na uwagę zasługuje także fakt, że w tym okresie powstały pierwsze dzieła systematyzujące geometrię; historyk grecki Proklos (412-485) w „*Komentarzu do pierwszej księgi ‹‹Elementów›› Euklidesa*" zaświadcza, że najwcześniejsze „Elementy" były ułożone przez Hipokratesa z Chios (ur. ok. 470 p.n.e.; zm. ok. 430 p.n.e.), następne „Elementy" ułożył Leon, młodszy o pokolenie od Platona. Dopiero jednak Euklides (około roku 300 p.n.e.) opracował w harmonijną całość zdecydowaną większość znanej wówczas geometrii, tworząc pierwszy podręcznik napisany całkowicie pionierską metodą dedukcyjną, zapoczątkowując aksjomatykę geometrii. W metodzie tej wyjściowym punktem teorii jest przyjęcie pojęć, zwanych pojęciami pierwotnymi, których nie definiuje się w zwykłym sensie. Zamiast tego ustala się układ zdań zwanych aksjomatami, które postulują pewne własności pojęć pierwotnych i tych zdefiniowanych za ich pomocą. Za twierdzenia teorii uznaje się aksjomaty oraz zdania, które są logicznymi konsekwencjami aksjomatów i dotyczą pojęć pierwotnych, a także nowych pojęć (np. figur geometrycznych) zdefiniowanych dalej w teorii. Przez ponad 2000 lat „Elementy" stanowiły wzorzec ścisłości naukowej. Nie zachował się do naszych czasów ani jeden antyczny rękopis „Elementów" Euklidesa, oprócz fragmentów znalezionych w Egipcie i w Herkulanum (z powodu spalenia Biblioteki Aleksandryjskiej przez Rzymian w 47 p.n.e. oraz spalenia resztek papirusów ze świątyni Serapisa w 392 r. przez chrześcijan za poparciem cesarza Teodozjusza). Szczęśliwie, to co przetrwało, zagarnęli w 640 r. mahometanie i wywieźli do centrum naukowego w Bagdadzie. Badania wykazały, że wszystkie znane nam rękopisy oprócz jednego (z Biblioteki Watykańskiej) kopiują tekst wydania z IV wieku opracowanego przez Teona z Aleksandrii (370 r.) – ostatniego przedstawiciela pogańskiej nauki hellenistycznej. Pierwsze wydanie drukowane powstało w 1482 r. w Wenecji i było tłumaczeniem łacińskim Campanusa z tekstu arabskiego. Egzemplarz znajduje się w bibliotece Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Figury geometryczne w teorii Euklidesa zastępowały przedmioty materialne i były ich idealizacją. Idealizacja sprawia, że bada się te własności przedmiotów materialnych, które dotyczą kształtu i wielkości, czyli zależą tylko od odległości między punktami przedmiotu, a nie na przykład od materiału czy dokładności z jaką jest wykonany (nic zatem dziwnego, że Euklides był zwolennikiem Platona także w zakresie poglądów filozoficznych – o czym zaświadcza Proklos). Własności takie nazywane są geometrycznymi i dotyczą wszystkich figur, które nie różnią się kształtem i wielkością od badanej figury. Dwie takie figury nazywają się przystającymi. Dokładniej mówiąc, dwie figury P i Q są uznane w geometrii euklidesowej za przystające, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $f : P \to Q$, które zachowuje odległość punktów. Takie odwzorowania nazywamy izometriami, a figury P

i Q nazywamy także figurami izometrycznymi. Zatem geometria od swego początku jest nauką badającą własności geometryczne figur.

We współczesnej geometrii elementarnej (dwu- lub trzywymiarowej) ujętej aksjomatycznie (Hilbert) mamy pojęcia pierwotne: punkt, prosta, płaszczyzna oraz dwie relacje między punktami, trzyargumentową relację dotyczącą trójek punktów (a, b, c) leżenia punktu b między punktami a i c oraz czteroargumentową dotyczącą czwórek punktów (a, b, c, d) przystawania odcinka ab do odcinka cd (oznaczającą taką samą odległość a od b jak odległość c od d). Te wszystkie pojęcia łączy kilkadziesiąt aksjomatów (zob. [6]), z których większość znana była Euklidesowi. Spośród nich słynny jest piąty postulat Euklidesa z księgi I, którego równoważne współczesne sformułowanie brzmi:
– *przez punkt poza daną prostą L przechodzi co najwyżej jedna prosta nieprzecinająca danej prostej L.*

Ponieważ dowodzi się, że z aksjomatów (bez tego ostatniego) wynika, że taka prosta istnieje, więc łącznie otrzymujemy wniosek: że taka prosta istnieje i jest dokładnie jedna.

Oryginalnie postulat ten ma postać:
– *Jeżeli prosta przecinająca dwie proste tworzy z nimi kąty jednostronnie wewnętrzne o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przedłużone nieskończenie przecinają się po tej stronie, po której znajdują się kąty o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych.*

Postulat V Euklidesa okazał się niezależny od pozostałych aksjomatów – co zostało dowiedzione dopiero w XIX w. (Łobaczewski, Bolyai, Gauss) – a co sprawia, że dołożenie jego zaprzeczenia nie prowadzi do sprzeczności, lecz do pewnej geometrii nieeuklidesowej (najczęściej zwanej geometrią Łobaczewskiego), w której przez punkt poza prostą przechodzi więcej niż jedna prosta nieprzecinająca danej prostej. Podstawową konsekwencją aksjomatu Euklidesa jest to, że w każdym trójkącie suma kątów wewnętrznych jest π (w geometrii nieeuklidesowej jest mniej niż π).

Układ aksjomatów geometrii elementarnej wraz z Postulatem V Euklidesa jest pełny, tzn. każde dwa modele są izometryczne. Podobnie dotyczy to geometrii nieeuklidesowej. Modelem dwuwymiarowej geometrii Euklidesa jest płaszczyzna kartezjańska $\mathbb{R}^2$ z odległością zadaną wzorem Pitagorasa i w której za proste przyjęte są warstwy względem jednowymiarowych podprzestrzeni wektorowych, czyli linie o równaniach $Ax + By + C = 0$ dla $|A| + |B| > 0$. Modelem trzywymiarowej geometrii Euklidesa jest przestrzeń kartezjańska $\mathbb{R}^3$ z odległością pitagorejską, w której za proste i płaszczyzny przyjęte są warstwy względem jedno- lub dwuwymiarowych podprzestrzeni wektorowych. Uogólnienie na wyższe wymiary jest oczywiste. Reasumując, geometrię euklidesową można zadać równoważnie za pomocą dwu pojęć pierwotnych: punkt i wektor oraz wprowadzoną odległością pitagorejską.

Wszystkie pojęcia geometryczne poczynając od prostej czy płaszczyzny dają się w tym kartezjańskim modelu zdefiniować.

Dla porządku dodajmy, jak wyglądają dwuwymiarowe modele geometrii nieeuklidesowej:

– model Poincarégo składa się z otwartej półpłaszczyzny, w której za proste przyjęte są półproste prostopadłe do brzegu oraz półokręgi prostopadłe do brzegu,
– pierwszy model Kleina składa się z otwartego koła, w którym za proste przyjęte są wszystkie cięciwy,
– drugi model Kleina składa się też z otwartego koła, w którym za proste przyjęte są wszystkie średnice oraz półokręgi prostopadłe do brzegu.

Gałąź geometrii, o której będzie dalej mowa, nazywa się *analityczną* ze względu na używaną w niej metodę. Metoda ta polega na tym, że położenie punktów wyznacza się przy pomocy pewnych ciągów liczb, zwanych *współrzędnymi* i przy pomocy rachunków na tych ciągach bada się własności geometryczne figur.

Powstanie geometrii analitycznej (Descartes [Kartezjusz] (1596–1650), Fermat (1601–1665)) nastąpiło po wprowadzeniu do geometrii i badanych tam figur układu (prostokątnego) współrzędnych (a więc *de facto* nastąpiło wraz z opisywaniem i badaniem figur geometrycznych zanurzonych (zawartych) w przestrzeni kartezjańskiej poprzez układ liczb – współrzędnych punktu). Współrzędne grają jedynie rolę narzędzia i służą tu tylko pomocniczo do opisu punktów figury, a przy ich pomocy można opisać także własności geometryczne, które w istocie nie mogą zależeć od wyboru układu współrzędnych i położenia figury w przestrzeni kartezjańskiej.

Metoda geometrii analitycznej opisu figur i ich własności przy pomocy współrzędnych generuje zjawisko, które nie występuje w geometrii elementarnej aksjomatycznej (pochodzącej od Euklidesa), a polegające na ukryciu własności geometrycznych w opisie współrzędnych i pojawieniu się często niemałych trudności w wychwyceniu tych własności z takiego opisu (równań). Powstaje w ten sposób bardzo poważna trudność: jak przy pomocy współrzędnych wykryć własności geometryczne badanych figur. Co więcej, także figury geometryczne (tzn. podzbiory przestrzeni kartezjańskiej wraz z definicją geometryczną zależną tylko od odległości punktów) można określić równoważnie w przestrzeni kartezjańskiej przy pomocy współrzędnych (równań z ich udziałem). Dlatego szereg figur geometrycznych będzie mieć dwie równoważne definicje: geometryczną i algebraiczną. Te drugie będą bardzo użyteczne w badaniach figur dzięki możliwości wykorzystywania algebry liniowej. A także są podstawą metody ciekawego i istotnego zastosowania współrzędnych do geometrii: szukania figury spełniającej dany geometryczny warunek. Znajdujemy równanie algebraiczne opisujące za pomocą współrzędnych wszystkie te i tylko te punkty, które spełniają ten warunek. Następnie porównujemy to równanie ze znanymi równaniami różnych tworów geometrycznych i na tej podstawie rozstrzygamy o rodzaju otrzymanej figury. Taką samą metodą możemy rozwiązać zagadnienie istnienia figury spełniającej dany geometryczny warunek. Na przykład, aby zbadać czym jest zbiór punktów jednakowo oddalonych od dwóch danych różnych punktów płaszczyzny, znajdujemy równanie opisujące punkty tego zbioru i zauważamy, że jest to równanie ogólne prostej. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy przez cztery punkty w $\mathbb{R}^3$ nieleżące w jednej płaszczyźnie można przeprowadzić sferę, należy udowodnić istnienie punktu równoodległego od danych czterech punktów. Piszemy cztery równania opisujące odległość punktu o zmiennych współrzędnych (x_1, x_2, x_3) od zadanych punktów i rozwiązujemy ten układ. Okazuje się, że ma on rozwiązanie i to tylko jedno.

W geometrii analitycznej traktowanej jako współrzędnościowy (kartezjański) model geometrii euklidesowej następuje uniezależnienie się od elementarnej geometrii euklidesowej poprzez definiowanie wszystkich pojęć geometrycznych za pomocą współrzędnych kartezjańskich i odległości (metryki). Także na gruncie przestrzeni kartezjańskich ($\mathbb{R}$ – prosta jako model geometrii euklidesowej jednowymiarowej, $\mathbb{R}^2$ – płaszczyzna jako model geometrii euklidesowej dwuwymiarowej, $\mathbb{R}^3$ – przestrzeń jako model geometrii euklidesowej trójwymiarowej) jest naturalne traktować wszystkie przypadki różnych wymiarów jednakowo, co nie prowadzi do nowych trudności, lecz często upraszcza lub wyjaśnia lepiej szereg pojęć i, co ważne, jest naturalne z punktu widzenia stosowania podstaw algebry liniowej. Takie podejście ma precedensy, np. w książkach Bieberbacha [4] czy Borsuka [5].

Ponieważ przekształcenia izometryczne figury na siebie (w szczególności całej przestrzeni kartezjańskiej na siebie) tworzą grupę, a własność geometryczna figury to taka, która przysługuje także każdej figurze izometrycznej z zadaną, więc można powiedzieć, że pojęcia geometryczne są niezmiennikami grupy izometrii. Zmieniając ewentualnie grupę izometrii na inną grupę przekształceń można uzyskać inne pojęcia geometryczne – niezmienniki względem tej innej grupy przekształceń. Taką ideę geometrii przyjął Felix Klein w swoim programie erlangeńskim (1872 r.): geometria jest to teoria niezmienników względem zadanej grupy przekształceń. Przykładami typowymi są: grupa izometrii (geometria euklidesowa), grupa podobieństw (geometria podobieństw), grupa afiniczna (geometria afiniczna), grupa przekształceń rzutowych (geometria rzutowa). Idąc znacznie dalej i rozważając grupę bijekcji ciągłych otrzymujemy topologię, a jeszcze dalej rozważając bijekcje otrzymujemy teorię mnogości.

Początkowo, wykład z geometrii analitycznej, na podstawie którego powstała ta książka wzorowany był na pracy K. Borsuka [5] (głównie rozdziały I, II, III i V), w której główna myśl była taka, aby rozwinąć badania podstawowych pojęć geometrii analitycznej (prosta, płaszczyzna, k-wymiarowa hiperpłaszczyzna) używając jedynie definicji geometrycznych (k-wymiarowa hiperpłaszczyzna to obraz $H = f[\mathbb{R}^k]$ w odwzorowaniu $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ zachowującym odległość – tj. izometrii na swój obraz – określonym na całej przestrzeni kartezjańskiej $\mathbb{R}^k$; dla $k = 1$ zbiory H nazywamy prostymi, dla $k = 2$ – płaszczyznami). Dopóki nie wiemy jednak jak wyglądają wszystkie takie izometrie, nie możemy się przekonać, czy tak otrzymane proste i płaszczyzny odpowiadają temu, co oczekujemy. Badanie izometrii, jej postaci analitycznej (wzór) zostały w książce Borsuka zbiorczo opracowane dopiero w rozdziale V w cyklu podstawowych twierdzeń o izometriach. Metoda ta została zarzucona i wykład o hiperpłaszczyznach został poprzedzony badaniami izometrii określonymi globalnie na całej przestrzeni kartezjańskiej i wyprowadzeniem wzoru na taką izometrię. Sprawiło to, że do badania własności geometrycznych hiperpłaszczyzn można było użyć aparatu algebry liniowej (w tym macierzy ortogonalnych). Także wiele twierdzeń ich dotyczących uzyskało prostsze dowody. Definicja geometryczna k-wymiarowej hiperpłaszczyzny posiada algebraiczny ekwiwalent: jest to po prostu warstwa względem k-wymiarowej podprzestrzeni wektorowej co odpowiada jak najbardziej naszym intuicjom geometrycznym euklidesowym. W przypadku $k = 1$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ otrzymujemy (dzięki definicji algebraicznej) twory (podzbiory) o znanych równaniach postaci $Ax+By+C = 0$ ($|A| + |B| > 0$) – czyli zwykłe proste w $\mathbb{R}^2$. Z punktu widzenia algebry liniowej są to warstwy względem jednowymiarowych podprzestrzeni wektorowych danych równaniami postaci $Ax + By = 0$. W przypadku $k = 2$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy twory o równaniach $Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$ – czyli płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$, które jako warstwy względem dwuwymiarowych podprzestrzeni wektorowych są zbiorami rozwiązań równań jednorodnych $Ax + By + Cz = 0$.

Poprawne, jasne, logicznie wyłożenie początków geometrii analitycznej nastręcza pewnych trudności związanych z tym, że do intuicyjnie jasnego od samego początku wykładu geometrii analitycznej przydałoby się używanie takich pojęć, jak linia prosta, osie współrzędnych czy kąt zorientowany, które w jakimś sensie posiadamy z kursu szkoły średniej. Niektórzy autorzy podręczników tak postępują, pisząc jakby pojęcia te były wcześniej znane. Jednakże takie założenie przeczy podstawowej zasadzie – szczególnie przyjętej w geometrii już od Euklidesa – wykładu dedukcyjnego, czyli takiej, w której nie używa się pojęć wcześniej na wykładzie niezdefiniowanych, a więc nieodwoływania się do pojęć geometrii analitycznej z kursu w szkole średniej. Jedną z głównych przyjętych w naszej książce zasad jest wyłożenie geometrii analitycznej metodą dedukcyjną. Dużą trudność sprawia pojęcie kąta zorientowanego o danym ramieniu pierwszym i danym drugim (będącymi półprostymi wychodzącymi z tego samego punktu) o zadanej z góry mierze łukowej $\alpha \in \mathbb{R}$ będącą dowolną liczbą rzeczywistą, zarówno dodatnią jak i ujemną, także dowolnie dużą. Aby takie pojęcie miało sens geometryczny, musi pojawić się wcześniej geometryczna definicja półprostej, a zatem także pojęcie izometrii i pojęcie własności geometrycznej danej figury. Dlatego pojęcie to będzie przedstawione w dalszej części wykładu (pojawi się dopiero w rozdziale szóstym). Ważnym przykładem izometrii dwuwymiarowej przestrzeni na siebie jest odwzorowanie liniowe $\phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

($\alpha \in \mathbb{R}$). Sens geometryczny tego odwzorowania polegać ma na tym, że ma ono we współrzędnych kartezjańskich (a więc analitycznie) opisywać obrót płaszczyzny o kąt zorientowany o mierze łukowej α, tzn. wybierając jako pierwszą dowolną półprostą L wychodzącą z początku układu współrzędnych, jej obraz $L' = \phi_\alpha[L]$ jako drugą półprostą ma być drugim ramieniem kąta zorientowanego o mierze łukowej α. Rzecz w tym, że do pojęcia kąta zorientowanego jest jeszcze daleka droga. Autorzy zatem przyjęli, że najpierw określi się łatwe do zbadania pojęcie izometrii ϕ_α i jedynie zaznaczy przy tej okazji, że geometryczne znaczenie jako analitycznego opisu obrotu o kąt zorientowany będzie wyjaśnione później, po wprowadzeniu pojęcia kąta zorientowanego. Pewnym uzasadnieniem tej kolejności jest fakt mówiący o tym, że dla małych liczb $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ dość łatwo jest równoważnie opisać kąt zorientowany jako część płaszczyzny zawartą między dwiema półprostymi wychodzącymi z tego samego punktu, przyjmując jedną z tych półprostych jako początkowe ramię, a drugą jako końcowe ramię (kąt taki może być wypukły lub wklęsły). Definicja taka nie nadaje się na uogólnienie dla większych liczb α. Kąt zorientowany o takiej mierze α, że $|\alpha| > 2\pi$ nie może być opisany jako część płaszczyzny. Odpowiednią definicję podajemy w rozdziale 6.

W geometrii analitycznej istotne znaczenie mają fundamentalne twierdzenia o izometriach. W książce Borsuka [5] znajdują się w jednym rozdziale, znajdującym się dopiero po rozdziale o hiperpowierzchniach. W wykładzie przyjęliśmy inną koncepcję: twierdzenia te są zamieszczone tam gdzie pojawiają się w sposób naturalny. Wyróżnione są w tekście pod nazwami twierdzeń „podstawowe twierdzenia o izometriach”. Są to twierdzenia 4.4.4, 5.3.8, 10.2.3, 11.3.1.

Zamierzeniem autorów było napisanie książki, która może służyć jako podręcznik do wykładu z geometrii analitycznej dla studentów pierwszego roku studiów na kierunku matematyka. Książka ta jest więc tylko wstępem do geometrii analitycznej, nieobejmującym wielu bardziej zaawansowanych jej działów. Jej celem jest wprowadzenie w krąg zagadnień podstawowych za pomocą środków możliwie elementarnych. Zakłada elementarną wiedzę z algebry liniowej w zakresie wyznaczników, układów równań liniowych i przestrzeni wektorowych, a także znajomość funkcji trygonometrycznych. W kontekście przestrzeni wektorowych wymaga zrozumienia pojęć: warstwy względem podprzestrzeni wektorowej, sumy algebraicznej podprzestrzeni wektorowych, sumy prostej podprzestrzeni wektorowych oraz ortogonalnego uzupełnienia względem danego iloczynu skalarnego.

Kolegom z zespołu prowadzącego ćwiczenia do wykładu (i nie tylko im) pragniemy gorąco podziękować za cenne uwagi i sugestie. Szczególnie pp. Ewie Marciniak, Jackowi Rogowskiemu (który poczynił szereg istotnych uwag we wcześniejszej fazie przygotowywania książki), Szymonowi Głąbowi, Jerzemu Kalinie, Bogdanowi Koszeli oraz także Stanisławowi Wrońskiemu i Henrykowi Dębińskiemu. Ci dwaj ostatni przygotowują specjalny skrypt obejmujący komputerowe ćwiczenia z geometrii analitycznej. Do zespołu prowadzącego zajęcia do wykładu z geometrii analitycznej ostatnio dołączyli także doktoranci pp. Alicja Krzeszowiec, Jakub Klima, Adam Majchrzycki, Emilia Szymonik. Im również dziękujemy za wnikliwe przeczytanie manuskryptu tej książki podczas przygotowywania się do prowadzenia ćwiczeń.

Autorzy