Spis treści

Przedmowa

Niniejsza książka przeznaczona jest głównie dla studentów pierwszego roku uczelni technicznych. Przedstawiony w niej materiał stanowi uzupełnienie i rozszerzenie treści programowych realizowanych we *wstępie do analizy matematycznej*. Jednocześnie umożliwia Czytelnikom zaznajomienie się z formalizmem matematycznym, często niezrozumiałym dla absolwentów szkół średnich, a wykorzystywanym w podstawowym kursie *analizy matematycznej*. W szczególności studenci kierunków informatycznych mogą traktować ten podręcznik jako wstęp do przedmiotu *matematyka dyskretna*.

Materiał zawarty w rozdziałach 1-5 obejmuje podstawy rachunku zdań, podstawy teorii zbiorów, relacje, własności funkcji, funkcje elementarne, moce zbiorów oraz indukcję matematyczną i rekurencję. Zagadnienia teoretyczne zilustrowane są odpowiednimi przykładami i ćwiczeniami. Istotną część podręcznika stanowią pytania testowe, które wraz z odpowiedziami umieszczone są w rozdziale szóstym. Pozwolą one Czytelnikom sprawdzić stopień zrozumienia kolejnych partii omawianego materiału, a z drugiej strony (szczególnie pytania znajdujące się w paragrafach 6.1 i 6.3) służą przypomnieniu wybranych zagadnień z zakresu szkoły średniej, w tym zagadnień przedstawionych we *Wstępie do analizy matematycznej i wybranych zagadnień fizyki* [3]. Formę powtórzenia może stanowić rozdział siódmy, który zawiera cztery zestawy przykładowych sprawdzianów. Zagadnienia o większym stopniu trudności oznaczone zostały gwiazdką. Na końcu książki dołączony jest skorowidz stosowanych oznaczeń oraz wykaz literatury.

Autorzy uprzejmie proszą o przesyłanie wszelkich uwag i komentarzy dotyczących podręcznika.

Inga Jędrzejewska
Elżbieta Kotlicka elzbieta.kotlicka@p.lodz.pl
Bożenna Szkopińska bszkopin@onet.pl

Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki
Politechnika Łódzka

Rozdział 1

Elementy logiki i teorii mnogości

1.1 Wstęp

Matematyka jest nauką dedukcyjną. Nowe pojęcia definiujemy za pomocą pojęć pierwotnych lub pojęć uprzednio wprowadzonych. Własności zdefiniowanych pojęć oraz związki między nimi formułujemy w twierdzeniach, które z kolei dowodzimy wykorzystując aksjomaty lub wcześniej udowodnione twierdzenia (tej tematyce dokładniej poświęcony jest paragraf 1.3)

Pojęcia pierwotne to pewne pojęcia, których nie definiujemy. Należą do nich np.

– w logice: pojęcie zdania i wartości logicznej;
– w teorii mnogości: pojęcie zbioru, elementu zbioru, przynależności elementu do zbioru;
– w geometrii: pojęcie punktu; itd.

Aksjomaty (inaczej **pewniki**) to stwierdzenia, które uważamy za prawdziwe bez ich dowodzenia. Przykładowo przypomnimy jeden z aksjomatów logiki i jeden z aksjomatów teorii mnogości.

- *Istnieje co najmniej jedno zdanie.*
- *Istnieje co najmniej jeden zbiór.*

Ze względu na złożony formalizm podejścia aksjomatycznego w dalszej części tego podręcznika nie będziemy bezpośrednio powoływać się na inne aksjomaty. Pozostałe pewniki wchodzące w skład powszechnie dziś przyjmowanego układu aksjomatów E. Zermelo i A. A. Fraenkla (w skrócie ZFC) zainteresowani Czytelnicy mogą znaleźć w [2]. Odnotujmy jedynie, że aksjomaty te zapewniają istnienie zbiorów, o których będzie mowa w dalszej części tego rozdziału. A zatem z odpowiednich akjomatów wynika istnienie zbioru pustego (def. 1.27), zbioru potęgowego (def. 1.28), sumy, iloczynu i różnicy dwóch dowolnych zbiorów (def. 1.33), sumy uogólnionej i iloczynu uogólnionego dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów (def. 1.60) oraz pary uporządkowanej (def. 1.43) i iloczynu kartezjańskiego (def. 1.45).

1.2 Rachunek zdań, funkcja zdaniowa

Język, którym się posługujemy w matematyce składa się ze zdań. Zadaniem logiki jest określanie relacji między zdaniami i badanie złożonych formuł pod kątem ich budowy i wartości logicznej.

Przez **zdanie** w sensie logiki rozumiemy poprawnie zbudowane (tj. zgodnie z zasadami gramatyki ustalonego języka) zdanie oznajmujące, któremu można jednoznacznie przypisać jedną z dwóch stałych wartości logicznych:

- prawdę (oznaczaną symbolicznie przez 1) albo
- fałsz (oznaczany symbolicznie przez 0).

Zdaniami w sensie logiki są np. sformułowania:

π jest liczbą naturalną. lub

Tlen jest pierwiastkiem chemicznym.

Możemy jednoznacznie stwierdzić, że pierwsze z nich jest zdaniem fałszywym, drugie zaś zdaniem prawdziwym. Natomiast wypowiedź:

Jestem studentem.

jest zdaniem gramatycznym, nie jest jednak zdaniem logicznym, gdyż ocena jego prawdziwości zależy od tego, kto je wypowiada. Podobnie jest w przypadku sformułowań: *Dzisiaj jest poniedziałek*, czy *x jest liczbą ujemną*. Oczywiste jest także, że zdaniami w sensie logiki nie są sformułowania typu: *Która jest godzina?* lub *Przeczytaj to uważnie*!

Definicja 1.1. **Zmienną zdaniową** nazywamy symbol, którym zastępujemy dowolne zdanie. Zmienne zdaniowe najczęściej oznaczamy małymi literami, np. $p, q, r, \ldots$

Każdemu zdaniu p przypisujemy jego **wartość logiczną** $w(p)$ w następujący sposób:

$$w(p) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p \text{ jest zdaniem prawdziwym,} \\ 0, & \text{gdy } p \text{ jest zdaniem fałszywym.} \end{cases}$$

Mając dane pewne zdania możemy z nich budować zdania złożone wykorzystując tzw. **funktory zdaniotwórcze** (inaczej **operatory logiczne** lub **spójniki logiczne**). Najważniejsze z nich to:

- **negacja zdania** (**zaprzeczenie zdania**) : $\sim p$ czytamy *nieprawda, że p*,
- **koniunkcja zdań** : $p \wedge q$ czytamy *p i q*,
- **alternatywa zdań** : $p \vee q$ czytamy *p lub q*,
- **implikacja zdań** : $p \Rightarrow q$ czytamy *jeśli p, to q* lub *z p wynika q*,

- **równoważność zdań** : $p \Leftrightarrow q$ czytamy *p jest równoważne q* lub *p zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi q*

Definicja 1.2. Dla ustalonych zdań p i q wartość logiczna zdań: $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$, zależy jedynie od wartości logicznych zdań p i q, w sposób jaki opisuje poniższa tabela:

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

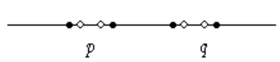
Przykład 1.3. Niech $p := (sin\pi = 0)$ oraz $q := (e > 3)$, gdzie liczba e jest stałą Eulera[1]. Wówczas prawdziwe są zdania: $\sim q$, $p \vee q$, $q \Rightarrow p$, $\sim (p \Leftrightarrow q)$, $(q \Rightarrow p) \vee (p \wedge q)$, itd.

Przykład 1.4. Koniunkcję i alternatywę zdań można zinterpretować m.in. za pomocą układów elektrycznych. Przyjmijmy, że p i q oznaczają włączniki umożliwiające przepływ prądu w układzie i działające według schematu:

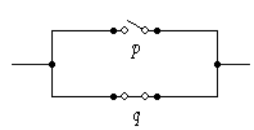
stan 0:
włącznik jest wyłączony

stan 1:
włącznik jest włączony

Układ utworzony poprzez szeregowe połączenie włączników p i q przewodzi prąd elektryczny, gdy oba włączniki są w stanie 1 (rys. 1.1) – sytuacja ta odpowiada koniunkcji zdań p i q. Podobnie połączenie równoległe włączników p i q (układ przewodzi prąd, gdy przynajmniej jeden włącznik jest w stanie 1 (rys. 1.2) odpowiada alternatywie zdań p i q.



Rys. 1.1: Połączenie równoległe



Rys. 1.2: Połączenie szeregowe

[1] Przypomnijmy, że e jest liczbą niewymierną zdefiniowaną jako granica ciągu o wyrazie ogólnym $(1 + \frac{1}{n})^n$; $e \approx 2.71$.

W informatyce stosuje się również takie funktory dwuargumentowe jak:

- **alternatywa wykluczająca**: $p \oplus q$ czytamy *p albo q*,
- **alternatywa załączająca**: $p \odot q$,
- **kreska Sheffera**: $p \mid q$.

Definicje tych funktorów przedstawia poniższa tabela:

p	q	$p \oplus q$	$p \odot q$	$p \mid q$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	1	1

Definicja 1.5. Wyrażenie utworzone ze zmiennych zdaniowych, funktorów zdaniotwórczych i ewentualnie nawiasów nazywamy **formułą zdaniową**, **schematem rachunku zdań** lub **wyrażeniem logicznym**. Formuły logiczne najczęściej oznaczamy literami: $\alpha, \beta, \ldots$

Definicja 1.6. Schemat rachunku zdań, który przyjmuje wartość logiczną 1 niezależnie od wartości logicznych występujących w nim zmiennych zdaniowych, nazywamy **tautologią** lub **prawem rachunku zdań**.

Twierdzenie 1.7 (Prawa rachunku zdań). *Dla dowolnych zmiennych zdaniowych p, q, r zachodzą następujące prawa:*

(1) $p \vee \sim p$ *prawo wyłączonego środka,*

(2) $\sim (p \wedge \sim p)$ *prawo niesprzeczności,*

(3) $p \Leftrightarrow \sim (\sim p)$ *prawo podwójnego zaprzeczenia,*

(4) $\left.\begin{array}{l}(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p) \\ (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)\end{array}\right\}$ *prawa przemienności,*

(5) $\left.\begin{array}{l}(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r) \\ (p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)\end{array}\right\}$ *prawa łączności,*

(6) $\left.\begin{array}{l}(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \\ (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))\end{array}\right\}$ *prawa rozdzielności,*

(7) $\left.\begin{array}{l}\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \\ \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)\end{array}\right\}$ *prawa de Morgana,*

(8) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ *prawo kontrapozycji,*

(9) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge p)$ *prawo zaprzeczenia implikacji,*

(10) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ *prawo sylogizmu,*

(11) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.

Przykładowo udowodnimy prawo zaprzeczenia implikacji stosując tzw. metodę zero-jedynkową. W tym celu, wykorzystując definicje funktorów zdaniotwórczych, konstruujemy tabelę wartości logicznych formuły (10) w zależności od wartości logicznych zmiennych p i q.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$\sim q \wedge p$	$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge p)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Jedynki w ostatniej kolumnie oznaczają, że badana formuła jest prawdziwa w każdym możliwym przypadku, a to zgodnie z definicją 1.6 oznacza, że schemat (10) jest tautologią.

Ćwiczenie 1.8. Udowodnić twierdzenie 1.7.

Uwaga 1.9. Mówimy, że formuły zdaniowe $\alpha(p, q, \dots)$ i $\beta(p, q, \dots)$ są **równoważne**, gdy formuła $[\alpha(p, q, \dots) \Leftrightarrow \beta(p, q, \dots)]$ jest tautologią. Np. formuła $\sim (p \vee q)$ jest równoważna formule $\sim p \wedge \sim q$ (na mocy prawa de Morgana).

Definicja 1.10. Wyrażenie zawierające zmienną, które staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy w miejsce tej zmiennej wstawimy nazwy odpowiednich obiektów (np. elementów pewnego zbioru), nazywamy **funkcją zdaniową** lub **formą zdaniową**. Jeśli dla funkcji zdaniowej $\varphi(x)$ określony jest zbiór X, z którego wybieramy te obiekty, to zbiór ten nazywamy **zakresem zmienności** funkcji zdaniowej $\varphi(x)$. Piszemy wówczas $\varphi(x),\ x \in X$.

Przykład 1.11. Przykłady funkcji zdaniowych:

(a) α *jest samogłoską,* $\alpha \in X$, gdzie X jest zbiorem liter alfabetu polskiego,
(b) $x^2 - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$,
(c) $|\sin x| \leqslant \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$,
(d) A *i* B *są rodzeństwem,*

(e) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0$.

Jeśli przy funkcji zdaniowej nie jest podany jej zakres, wtedy można przyjąć, że zakresem danej fukcji zdaniowej jest zbiór wszystkich obiektów, dla których ma ona sens. I tak np. patrząc na postać funkcji zdaniowych z przykładów (d) i (e), można przyjąć, iż zakresem pierwszej z nich jest zbiór wszystkich ludzi, zaś drugiej – zbiór liczb zespolonych[2].

Definicja 1.12. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową, której zakresem zmienności jest niepusty zbiór X. Jeśli dla pewnego $a \in X$ wyrażenie $\varphi(a)$ jest zdaniem prawdziwym, to mówimy, że a **spełnia funkcję zdaniową** $\varphi(x)$. Zbiór wszystkich elementów zbioru X, które spełniają funkcję zdaniową $\varphi(x)$, tj. zbiór

$$\{x \in X : \varphi(x)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : w(\varphi(x)) = 1\}$$

nazywamy **wykresem funkcji zdaniowej** $\varphi(x)$.

Przykład 1.13. Niech

$$\varphi(x) := (x^2 + x < 0),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad \psi(x) := (x^2 + x < 0),\ x \in \mathbb{N}.$$

Wówczas wykresem funkcji zdaniowej $\varphi(x)$ jest przedział $(-1, 0)$, zaś wykres funkcji $\psi(x)$ stanowi zbiór pusty.

Uwaga 1.14. Jak pokazują przykłady 1.11 (b), 1.11 (c) oraz 1.13, funkcjami zdaniowymi są w szczególności równania i nierówności. W takim przypadku zakres funkcji zdaniowej nazywamy odpowiednio dziedziną równania lub dziedziną nierówności, zaś jej wykres – zbiorem rozwiązań równania lub zbiorem rozwiązań nierówności.

1.3 Twierdzenia, metody dowodzenia i reguły wnioskowania

Nowe twierdzenia najczęściej powstają w ten sposób, że najpierw formułujemy pewną hipotezę, a potem staramy się ją udowodnić. W dowodach twierdzeń wykorzystujemy aksjomaty, twierdzenia wcześniej udowodnione oraz tzw. reguły wnioskowania opierające się na podstawowych prawach rachunku zdań.

Twierdzenia matematyczne na ogół formułuje się w postaci implikacji, jak ma to miejsce np. w przypadku twierdzenia (T1).

[2]Zbiór liczb zespolonych jest naturalnym rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych; dokładniejsze informacje na ten temat można znaleźć np. w [1].

(T1) *Jeśli* 0 *jest ostatnią cyfrą danej liczby, to liczba ta jest podzielna przez* 5.

Z punktu widzenia logiki twierdzenia tego typu można zapisać schematycznie w postaci implikacji $Z \Rightarrow T$, gdzie Z i T mogą być pewnymi zdaniami lub funkcjami zdaniowymi. W takiej sytuacji poprzednik implikacji Z nazywamy **założeniem twierdzenia**, zaś następnik T – **tezą twierdzenia**. (Przykładowo, założenie twierdzenia (T1) stanowi formuła: 0 *jest ostatnią cyfrą danej liczby*, zaś tezę wyrażenie: *liczba jest podzielna przez* 5.) Twierdzenie mające postać implikacji $Z \Rightarrow T$ można również wyrazić w następujący sposób:

*Z jest **warunkiem wystarczającym (dostatecznym)** na to, aby zachodziło T,* lub

*T jest **warunkiem koniecznym** na to, aby zachodziło Z.*

Rozważane twierdzenie (T1) można więc sformułować w sposób równoważny w postaci (T1′) lub (T1″):

(T1′) *Fakt, że* 0 *jest ostatnią cyfrą danej liczby, jest warunkiem wystaczającym podzielności tej liczby przez* 5.

(T1″) *Podzielność danej liczby przez* 5 *jest warunkiem koniecznym, na to aby ostatnią cyfrą tej liczby było* 0.

Twierdzenia mogą być też formułowane w postaci równoważności $Z \Leftrightarrow T$ (mówimy wówczas, że Z jest **warunkiem wystarczającym i koniecznym** na to, aby zachodziło T) lub tylko w postaci tezy T. Przykłady takich twierdzeń podajemy poniżej:

(T2) *Liczba jest podzielna przez* 5 *wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest* 0 *lub* 5.

(T2′) *Fakt, że ostatnią cyfrą danej liczby jest* 0 *lub* 5, *jest warunkiem wystaczającym i koniecznym podzielności tej liczby przez* 5.

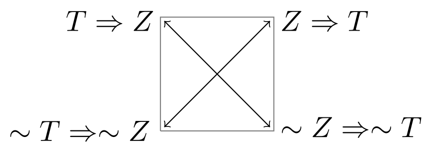
(T3) $\sqrt{2}$ *jest liczba niewymierną.*

Definicja 1.15. Niech dana będzie formuła postaci $Z \Rightarrow T$, którą dalej będziemy nazywać **implikacją prostą**. Wówczas

(a) implikację $T \Rightarrow Z$ nazywamy **implikacją odwrotną** do implikacji prostej,

(b) implikację $\sim Z \Rightarrow \sim T$ nazywamy **implikacją przeciwną** do implikacji prostej,

(c) implikację $\sim T \Rightarrow \sim Z$ nazywamy **implikacją przeciwstawną** do implikacji prostej.



Rys. 1.3: Kwadrat logiczny

Bezpośrednio z prawa kontrapozycji wynika, że implikacja prosta jest równoważna implikacji przeciwstawnej oraz implikacja odwrotna jest równoważna implikacji przeciwnej. Zależności te ilustruje się często za pomocą tzw. kwadratu logicznego, w ten sposób że przy wierzchołkach kwadratu położonych wzdłuż tej samej przekątnej umieszcza się implikacje równoważne. W konsekwencji, aby udowodnić wszystkie cztery rozważane implikacje, wystarczy udowodnić jakiekolwiek dwie spośród nich umieszczone wzdłuż jednego z boków kwaratu logicznego. Jako ćwiczenie proponujemy napisać implikację odwrotną, przeciwstawną i przeciwną do twierdzenia (T1) oraz zastanowić się, wykorzystując w tym celu również kwadrat logiczny, które z nich są prawdziwe.

Ze względu na zastosowaną metodę dowodzenia możemy wyróżnić następujące podstawowe typy dowodów:

- **Dowód wprost** – jest to bezpośredni dowód postawionej hipotezy (patrz przykład 1.21). Wyróżniamy tutaj m.in. takie dowody jak:

  dowód konstruktywny – wskazujemy lub konstruujemy obiekty spełniające tezę twierdzenia; w ten sposób można uzasadnić (wskazując np. liczby 4 i 10) prawdziwość twierdzenia:

  W zbiorze liczb naturalnych istnieją dwie liczby różniące się o 6.

  dowód egzystencjonalny – wykazujemy jedynie istnienie obiektu spełniającego tezę twierdzenia; np. aby udowodnić twierdzenie:

  Jeśli wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu liczbowego należą do zbioru $\{1, 2, 3\}$*, to pewne dwa wyrazy tego ciągu są równe*,

  wystarczy wykazać, że w danym ciągu istnieją dwa takie same wyrazy (ich istnienie wynika bezpośrednio z faktu, iż istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych, a zatem nieskończenie wiele spośród wyrazów danego ciągu musi przyjąć wartość 1, 2 lub 3);

  dowód indukcyjny – metoda ta będziej dokładniej omówiona w rozdziale 4; w ten sposób dowodzimy np. twierdzenie:

  Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność: $2^n > n$.

dowód „w próżni" – jeśli Z jest zdaniem fałszywym, to twierdzenie postaci $Z \Rightarrow T$ jest zawsze prawdziwe.

- **Dowód nie wprost przez sprowadzenie do sprzeczności** – wykazujemy, że z zaprzeczenia tezy i założeń, czyli zdania $\sim T \wedge Z$ (w przypadku braku założeń zdania $\sim T$), wynika fałsz (metodę tę stosuje się np. w dowodzie twierdzenia (T3)).
- **Dowód nie wprost** (dla twierdzeń postaci $Z \Rightarrow T$) – dowodzimy implikacji przeciwstawnej (por. kwadrat logiczny).

Odnotujmy, że w bardziej złożnych dowodach często stosuje się kilka spośród metod przedstawionych powyżej oraz że to samo twierdzenie może mieć kilka różnych dowodów.

Definicja 1.16. Formułę zdaniową β nazywamy **logiczną konsekwencją** ciągu formuł zdaniowych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, jeśli przy każdym układzie wartości logicznych jakie przyjmują zmienne zdaniowe występujące w formułach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$, jeśli tylko $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ przedstawiają zdania prawdziwe, to również β jest zdaniem prawdziwym.

Definicja 1.17. **Reguły wnioskowania** to operacje, które skończonym ciągom formuł zdaniowych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ przyporządkowują formułę β w taki sposób, że β jest logiczną konsekwencją $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Schematycznie zapisujemy je w postaci

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta},$$

przy czym $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazywamy **przesłankami**, zaś β – **wnioskiem**.

Bezpośrednio z definicji prawa rachunku zdań i reguł wnioskowania wynika, że jeśli wszystkie przesłanki reguły wnioskowania są tautologiami, to również wniosek jest tautologią. Łatwo zauważyć, iż pomiędzy regułami wnioskowania a prawami rachunku zdań zachodzi następujący związek:

Twierdzenie 1.18. *Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ będą formułami zdaniowymi. Schemat $\dfrac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$ jest regułą wnioskowania wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta)$ jest prawem rachunku zdań.*

Przykład 1.19. Przykłady reguł wnioskowania:

(1) $\dfrac{\alpha,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$ reguła odrywania,

(2) $\dfrac{\sim \beta,\ \alpha \Rightarrow \beta}{\sim \alpha}$,

(3) $\dfrac{\alpha \vee \beta, \sim \alpha}{\beta}$,

(4) $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$,

(5) $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta, \ \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}$,

(6) $\dfrac{\sim \alpha \Rightarrow (\gamma \wedge \sim \gamma)}{\alpha}$,

(7) $\dfrac{(\alpha \wedge \sim \beta) \Rightarrow (\gamma \wedge \sim \gamma)}{\alpha \Rightarrow \beta}$.

Fakt, że podane schematy są regułami wnioskowania można uzasadnić wykorzystując twierdzenie 1.18 i odpowiednie prawo rachunku zdań – przykładowo reguła (5) wynika natychmiast z tautologii (11) (twierdzenie 1.40). Uzasadnienie pozostałych reguł wnioskowania pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 1.20. Rozważmy następujące zdania:

$\alpha_1 :=$ *Spadł śnieg.*
$\alpha_2 :=$ *Nie spadł śnieg.*
$\alpha_3 :=$ *Jeśli spadnie śnieg, to ulepimy bałwanka.*

Jeśli prawdziwe są zdania α_1 i α_3, to z reguły odrywania otrzymujemy natychmiast wniosek: *Ulepimy bałwanka.* Jeśli natomiast prawdziwe są zdania α_2 i α_3, to z reguły (2) wnioskujemy, że *nie ulepimy bałwanka.*

Zauważmy, że aby uzyskać powyższe wnioski nie potrzeba znajomości reguł wnioskowania. Ten prosty przykład pokazuje, że reguły wnioskowania opisują w formalny sposób (używając języka matematycznego) pewne naturalne elementy rozumowania, z którymi spotykamy się w życiu codziennym. Rozumowania oparte na niektórych spośród reguł wnioskowania znane już były w starożytności.

Przykład 1.21. Niech x oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Rozważmy następujące formy zdaniowe:

$\alpha_1 :=$ (*Jeśli x jest liczbą całkowitą, to x jest liczbą parzystą lub nieparzystą.*)
$\alpha_2 :=$ (*x jest liczbą naturalną.*)
$\alpha_3 :=$ (*x nie jest liczbą parzystą.*)

Pokażemy, że z prawdziwości $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wynika wniosek β, gdzie

$\beta :=$ (*x jest liczbą nieparzystą.*)

W tym celu przeprowadzimy krótki dowód z wykorzystaniem poznanych reguł wnioskowania. Dowód ten podzielimy na etapy przyjmując zasadę, że na każdym etapie wybieramy pewne przesłanki spośród danych, stosujemy odpowiednią regułę wnioskowania i otrzymany wniosek dołączamy do ciągu przesłanek. Dowód uznamy za zakończony, jeśli na pewnym etapie jako wniosek uzyskamy tezę β. Do ciągu przesłanek dołączmy znany fakt:

$\alpha_4 :=$ (*Jeśli x jest liczbą naturalną, to jest liczbą całkowitą.*)

oraz wprowadźmy następujące oznaczenia: $N :=$ (*x jest liczbą naturalną*), $C :=$ (*x jest liczbą całkowitą*), $P :=$ (*x jest liczbą parzystą*). Wówczas przesłanki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ można zapisać w postaci ciągu: $C \Rightarrow (P \vee \beta)$, N, $\sim P$, $N \Rightarrow C$.
Dowód:

etap 1: $\dfrac{N \Rightarrow C,\ C \Rightarrow (P \vee \beta)}{N \Rightarrow (P \vee \beta)}$ stosujemy regułę (5);

etap 2: $\dfrac{N,\ N \Rightarrow (P \vee \beta)}{P \vee \beta}$ stosujemy regułę (1);

etap 3: $\dfrac{P \vee \beta, \sim P}{\beta}$ stosujemy regułę (3).

1.4 Rachunek zbiorów

Teoria mnogości jest nauką o zbiorach i związkach między nimi. Teoria ta powstała w końcu XIX wieku, a za jej twórcę uważa się George'a Cantora.

Zbiory oznaczamy najczęściej dużymi literami, zaś ich elementy – małymi. Fakt, że a jest elementem zbioru A, zapisujemy symbolicznie w postaci: $a \in A$. Jeśli element a nie należy do zbioru A, to stosujemy oznaczenie: $a \notin A$. Zatem

$$a \notin A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sim (a \in A).$$

Koniunkcję zdań mającą postać

$$a_1 \in A \wedge a_2 \in A \wedge \ldots \wedge a_n \in A$$

zapisujemy w skróconej formie: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Zbiory można definiować na różne sposoby. Najczęściej poprzez

- wymienienie jego elementów, np. *A jest zbiorem złożonym z elementów*: a, b, c, d, e – fakt ten zapisujemy symbolicznie:

$$A = \{a, b, c, d, e\};$$

- podanie metody wyznaczenia elementów zbioru (por. definicja rekurencyjna, paragraf 5.2);
- podanie własności, jakie spełniają elementy danego zbioru, np. *B jest zbiorem składającym się z pierwszych pięciu liter alfabetu polskiego*. Jeśli własności te wyrażone są przy pomocy pewnej funcji zdaniowej, wówczas określany zbiór jest wykresem tej funkcji – w taki sposób definiujemy np. przedziały na osi liczbowej.

Definicja 1.22. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$.

(a) Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x > a \ \wedge \ x < b\}$ nazywamy **przedziałem otwartym** i oznaczamy przez (a, b).

(b) Zbiór $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a \ \wedge \ x \leqslant b\}$ nazywamy **przedziałem domkniętym** i oznaczamy przez $[a, b]$.

(c) Podobnie definiujemy przedziały jednostronnie domknięte:

$$(a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > a \ \wedge \ x \leqslant b\} \quad \text{oraz}$$

$$[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a \ \wedge \ x < b\}.$$

Mając dane różne zbiory możemy określać pewne zależności między tymi zbiorami (np. zawieranie czy równość zbiorów), jak również definiować pewne działania na tych zbiorach (takie jak suma, iloczyn czy różnica zbiorów). Tej tematyce poświęcimy dalszą część tego paragrafu.

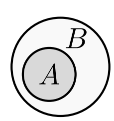
Definicja 1.23. Jeśli każdy element zbioru A jest elememtem zbioru B, to mówimy, że A jest **podzbiorem** zbioru B lub, że B jest **nadzbiorem** zbioru A. Mówimy wówczas również, że zbiór A jest **zawarty** w B lub B **zawiera** A i zapisujemy odpowiednio

$$A \subset B \quad \text{lub} \quad B \supset A.$$

Równoważnie możemy zapisać:

$$A \subset B \ \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ (\text{dla każdego } x\text{: } x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Symbol $\subset$ nazywamy znakiem **inkluzji**.

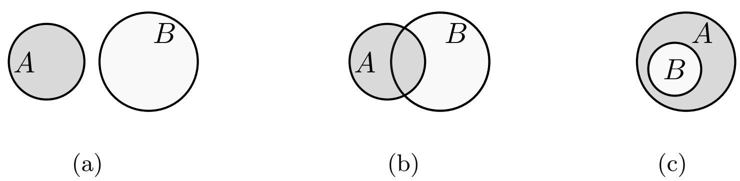


Rys. 1.4: $A \subset B$

Zbiory oraz zachodzące między nimi związki będziemy ilustrować graficznie za pomocą rysunków zwanych **diagramami Venna**. Zawieranie zbiorów albo jego brak obrazują odpowiednie diagramy na rysunkach 1.4 i 1.5.

W przypadku, gdy zbiór A nie jest podzbiorem zbioru B zapisujemy $A \not\subset B$. Można pokazać, że zachodzi równoważność:

$$A \not\subset B \quad \Leftrightarrow \quad (\text{istnieje } x\colon x \in A \wedge x \notin B).$$



Rys. 1.5: Trzy możliwe sytuacje, w których $A \not\subset B$

Definicja 1.24. O zbiorach A i B mówimy, że są **równe**, wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same elementy. Zatem

$$A = B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (\text{dla każdego } x\colon x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Twierdzenie 1.25. *Dla dowolnych zbiorów A i B mamy:*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A).$$

Przykład 1.26. Niech $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 1\}$. Wówczas $A = B$ oraz $B \subset C$. Poza tym $0 \in C$ i $0 \notin B$, co oznacza, że $C \not\subset B$.

Definicja 1.27. Zbiór, który nie ma żadnego elementu nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Definicja 1.28. Zbiór złożony ze wszystkich podzbiorów danego niepustego zbioru A nazywamy **zbiorem potęgowym** zbioru A i oznaczamy przez 2^A lub $\mathcal{P}(A)$. Zatem

$$B \in 2^A \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad B \subset A.$$

Przykład 1.29.

(a) Jeśli $A = \emptyset$, to $2^A = \{\emptyset\}$ oraz $2^{(2^A)} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) Niech $A = \{-1, 1\}$. Wówczas $2^A = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, A\}$. Jako ćwiczenie proponujemy wyznaczyć zbiór $2^{(2^A)}$.

Ćwiczenie 1.30. Podać przykłady zbiorów będących elementami rodziny $2^{\mathbb{N}}$ i rodziny $2^{\mathbb{R}}$.

Uwaga 1.31. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego niepustego zbióru A zbiór potęgowy 2^A posiada przynajmniej dwa różne elementy, a mianowicie

$$\emptyset \in 2^A \text{ i } A \in 2^A.$$

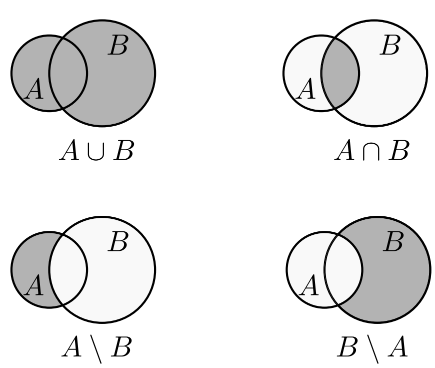
Ćwiczenie 1.32. Uzasadnić, że jeśli $A \subset B$, to $2^A \subset 2^B$.

Definicja 1.33.

(a) Przez **sumę** zbiorów A i B rozumiemy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B. Zbiór ten oznaczamy przez $A \cup B$.

(b) Przez **iloczyn** (**część wspólną** lub **przecięcie**) zbiorów A i B rozumiemy zbiór zawierający tylko te elementy, które jednocześnie należą do zbioru A i do zbioru B. Zbiór ten oznaczamy przez $A \cap B$.

(c) **Różnicą** zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do B. Zbiór ten oznaczamy przez $A \setminus B$.



Rys. 1.6: Diagramy ilustrujące podstawowe działania na zbiorach

Powyższe definicje możemy zapisać w sposób symboliczny:

$$\begin{aligned} x &\in A \cup B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \vee x \in B), \\ x &\in A \cap B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B), \\ x &\in A \setminus B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \notin B). \end{aligned}$$

Definicja 1.34. Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, gdy $A \cap B = \emptyset$ (por. rys. 1.5 (a)).

Definicja 1.35. Załóżmy, że rozważamy zbiory zawarte w pewnym niepustym zbiorze X, który będziemy dalej nazywać **przestrzenią**. Jeśli zbiór A jest podzbiorem zbioru X, to różnicę $X \setminus A$ nazywamy **dopełnieniem** zbioru A (do przestrzeni X) i oznaczamy symbolem A'.

Rys. 1.7: Zbiór i jego dopełnienie

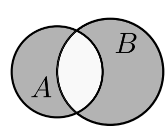
Definicja 1.36. Zbiór postaci $A \triangle B$, gdzie

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

nazywamy **różnicą symetryczną** zbiorów A i B.

Z definicji wynika natychmiast, że

$$x \in A \triangle B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \setminus B \;\oplus\; x \in B \setminus A).$$



Rys. 1.8: Różnica symetryczna zbiorów A i B

Przykład 1.37. Niech $A = \{1, 2\}$, $B = [1, 2)$. Wówczas $A \cup B = [1, 2]$, $A \cap B = \{1\}$, $A' = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, $B' = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ oraz $A \triangle B = (1, 2]$. Ponadto łatwo sprawdzić, że $(A \cup B)' = A' \cap B'$ i $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Twierdzenie 1.38. *Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi o zakresie X. Wówczas prawdziwe są równości:*

(1) $\{x \in X : \varphi(x) \vee \psi(x)\} = \{x \in X : \varphi(x)\} \cup \{x \in X : \psi(x)\}$,
(2) $\{x \in X : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in X : \varphi(x)\} \cap \{x \in X : \psi(x)\}$,
(3) $\{x \in X : \sim \varphi(x)\} = X \setminus \{x \in X : \varphi(x)\}$,
(4) $\{x \in X : \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\} = \{x \in X : \varphi(x)\}' \cup \{x \in X : \psi(x)\}$.

Przykład 1.39. Wykorzystując powyższe twierdzenie wyznaczymy zbiory:
$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0 \ \wedge \ x^2 + x = 0\}$ oraz
$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0 \ \Rightarrow \ x^2 + x = 0\}$.
Przyjmijmy $\varphi(x) := (x^2 - x > 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) := (x^2 + x = 0)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \wedge \psi(x)\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R} : \psi(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x = 0\} \\ &= [(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)] \cap \{-1, 0\} = \{-1\} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \Rightarrow \psi(x)\} = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x)\}' \cup \{x \in \mathbb{R} : \psi(x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\}' \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x = 0\} \\ &= [(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)]' \cup \{-1, 0\} = [0, 1] \cup \{-1\}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 1.40 (Prawa rachunku zbiorów). *Dla dowolnych podzbiorów A, B, C przestrzeni X prawdziwe są następujące prawa:*

(1) $(A \subset B \ \wedge \ B \subset C) \ \Rightarrow \ A \subset C$ *prawo przechodniości inkluzji,*

(2) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$ *prawa przemienności,*

(3) $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array}\right\}$ *prawa łączności,*

(4) $\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}$ *prawa rozdzielności,*

(5) $\begin{array}{l} A \cup \emptyset = A, \\ A \cap \emptyset = \emptyset, \end{array}$

(6) $\begin{array}{l} A \cup X = X, \\ A \cap X = A, \end{array}$

(7) $\left.\begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array}\right\}$ *prawa idempotentności,*

(8) $A \cap B \subset A \quad \wedge \quad A \cap B \subset B$,

(9) $A \subset A \cup B \quad \wedge \quad B \subset A \cup B$,

(10) $\left.\begin{array}{l} A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A \\ A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B \end{array}\right\}$ *prawa pochłaniania,*

(11) $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \setminus B = \emptyset$,

(12) $(A')' = A$,

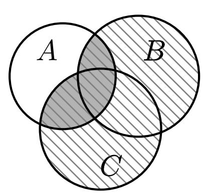
(13) $\left.\begin{array}{l} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array}\right\}$ *prawa de Morgana.*

Prawa rachunku zbiorów dowodzi się wykorzystując m.in. prawa rachunku zdań. Łatwiejsze, choć bardziej intuicyjne i mniej formalne, są „dowody" za pomocą diagramów Venna – przykład tego typu argumentacji w stosunku do pierwszego z praw rozdzielności przedstawiamy poniżej.

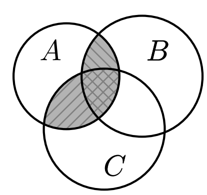
Przykład 1.41. Stosując diagramy Venna uzasadnimy, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

W tym celu rysujemy trzy przecinające się zbiory A, B i C. Na pierwszym diagramie (rys. 1.9) zaznaczamy odpowiednio zbiory występujące po lewej stronie dowodzonej równości tzn. sumę $B \cup C$ (wypełnienie) oraz iloczyn $A \cap (B \cup C)$, zaś na drugim diagramie (rys. 1.10) – zbiory występujące po prawej stronie równości: $A \cap B$, $A \cap C$ i sumę tych zbiorów .



Rys. 1.9: $A \cap (B \cup C)$



Rys. 1.10: $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ćwiczenie 1.42. Stosując diagramy Venna uzasadnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

(a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;

(b) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Definicja 1.43. **Parą uporządkowaną**[3] $\langle a, b\rangle$ o poprzedniku a i następniku b nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

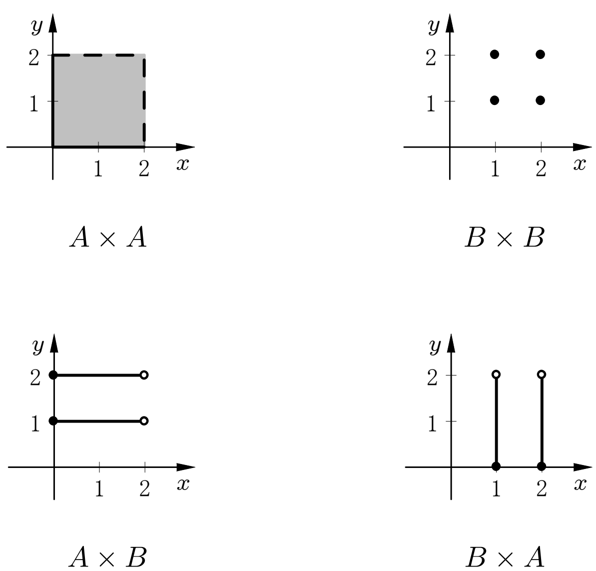
Twierdzenie 1.44. *Dla dowolnych* a, b, c, d

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \quad \Leftrightarrow \quad (a = c \ \wedge \ b = d).$$

Definicja 1.45. Niech A, B będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Zbiór złożony z wszystkich par uporządkowanych $\langle a, b\rangle$, gdzie $a \in A$, $b \in B$, nazywamy **iloczynem kartezjańskim** zbiorów A i B i oznaczamy symbolem $A \times B$. Zatem

$$\langle a, b\rangle \in A \times B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (a \in A \ \wedge \ b \in B).$$

Przykład 1.46. Niech $A = [0, 2)$ oraz $B = \{1, 2\}$. Odpowiednie iloczyny kartezjańskie tych zbiorów przedstawione są na rysunku 1.11.



Rys. 1.11

[3]Istnieją różne sposoby definiowania pary uporządkowanej – definicja przedstawiona tutaj została zaproponowana przez K. Kuratowskiego.

Twierdzenie 1.47. *Dla dowolnych niepustych zbiorów A, B, C mamy:*

(1) $A \times B = B \times A \;\;\Leftrightarrow\;\; A = B$,
(2) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$,
(3) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
(4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Uwaga 1.48.

(a) Jak pokazuje twierdzenie 1.47 oraz przykład 1.46, iloczyn kartezjański zachowuje prawo łączności, natomiast nie jest przemienny.
(b) Iloczyn kartezjański można zdefiniować również dla dowolnej skończonej ilości niepustych zbiorów (patrz przykład 5.17). W szczególności iloczyn kartezjański trzech niepustych zbiorów A, B, C definiujeny w następujący sposób:

$$A \times B \times C \stackrel{\text{def}}{=} (A \times B) \times C.$$

(c) Iloczyn $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ razy}}$ oznaczamy krótko przez A^n.
(d) Iloczyn $\mathbb{R}^2$ będziemy utożsamiać z płaszczyzną kartezjańską Oxy, zaś $\mathbb{R}^3$ – z przestrzenią $Oxyz$.

Wprowadzenie pojęcia iloczynu kartezjańskiego umożliwia m.in. rozważanie funkcji zdaniowych wielu zmiennych, których przykłady podajemy poniżej:

$$\varphi(x, y) := (x \textit{ jest dzielnikiem } y), \quad \langle x, y \rangle \in \mathbb{N}^2,$$
$$\varphi(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 < 4), \quad \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3.$$

1.5 Kwantyfikatory

Każde zdanie jest funkcją zdaniową, natomiast odwrotnie być nie musi. Z funkcji zdaniowej można otrzymać zdanie poprzez

- podstawienie w miejsce zmiennej dowolnego elementu należącego do zakresu zmienności tej funkcji,
- zastosowanie funktorów zdaniotwórczych, takich jak np. kwantyfikatory, wiążących wszystkie zmienne funkcji zdaniowej (por. przykład 1.50).

Definicja 1.49. Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową, której zakresem zmienności jest zbiór X.

(a) Jeśli $\{x \in X : \varphi(x)\} = X$, to mówimy, że funkcja zdaniowa $\varphi(x)$ zachodzi dla każdego $x \in X$ i zapisujemy

$$\bigwedge_{x \in X} \varphi(x) \quad \text{lub} \quad \forall (x \in X)\ \varphi(x).$$

(b) Jeśli $\{x \in X : \varphi(x)\} \neq \emptyset$, to mówimy, że funkcja zdaniowa $\varphi(x)$ zachodzi dla pewnego $x \in X$ (inaczej: istnieje $x \in X$ taki, że zachodzi $\varphi(x)$) i zapisujemy

$$\bigvee_{x \in X} \varphi(x) \quad \text{lub} \quad \exists (x \in X)\ \varphi(x).$$

Jeśli istnieje tylko jeden element o takiej własności, to stosujemy oznaczenia:

$$\bigvee_{x \in X}!\ \varphi(x) \quad \text{lub} \quad \exists! (x \in X)\ \varphi(x).$$

Symbol $\bigwedge$ ($\forall$) jest symbolem funktora zdaniotwórczego zwanego **kwantyfikatorem ogólnym** (inaczej: **kwantyfikatorem dyżym**), zaś symbol $\bigvee$ ($\exists$) – symbolem funktora zdaniotwórczego zwanego **kwantyfikatorem szczegółowym** (**kwantyfikatorem małym** lub **egzystencjonalnym**).

Przykład 1.50.

(a) Niech $\varphi(x) :=$ (x *jest liczbą parzystą*) dla $x \in \mathbb{Z}$. Zauważmy najpierw, że istnieje liczba całkowita, dla której zachodzi $\varphi(x)$, np. liczba 4. Oznacza to, że prawdziwe jest zdanie: $\bigvee_{x \in X} \varphi(x)$. Z drugiej strony, nie wszystkie liczby całkowite spełniają daną funkcję zdaniową (np. $w(\varphi(-3)) = 0$), więc zdanie: $\bigwedge_{x \in X} \varphi(x)$ jest zdaniem fałszywym.

(b) Z własności funkcji trygonometrycznych wynika, że prawdziwe są następujące zdania:

$$\Big(\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \sin^2 x + \cos^2 x = 1\Big), \ \Big(\sim \Big(\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 2\Big)\Big), \ \Big(\bigvee_{x \in \mathbb{Z}} \bigvee_{y \in \mathbb{Z}} \sin x = y\Big).$$

Uwaga 1.51. W rachunku zdań i kwantyfikatorów istotną rolę odgrywają nawiasy – ich brak może zmienić sens zapisanej formuły. Dla przykładu wyrażenie

$$\bigwedge_{x \in X} (\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)), \tag{1.1}$$

gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ sa ustalonymi funkcjami zdaniowymi o wspólnym zakresie X, jest zdaniem, zaś formuła

$$\bigwedge_{x\in X} \varphi(x) \Rightarrow \psi(x) \tag{1.2}$$

określa pewną funkcję zdaniową zmiennej x. Wyrażenie ujęte w nawias, które bezpośrednio następuje po symbolu kwantyfikatora stanowi tzw. **zasięg** tego kwantyfikatora. Nawiasy zwykle pomija się, gdy w zasięgu kwantyfikatora nie występują spójniki logiczne. A zatem zasięg formuły (1.1) stanowi wyrażenie $(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$, zaś formuły (1.2) – wyrażenie $\varphi(x)$.

Definicja 1.52. Dla ustalonych funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ o wspólnym zakresie X definiujemy **kwantyfikatory o zakresie ograniczonym** w następujący sposób:

(a) $\bigwedge_{\phi(x)} \psi(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{x\in X} [\phi(x) \Rightarrow \psi(x)],$

(b) $\bigvee_{\phi(x)} \psi(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x\in X} [\phi(x) \wedge \psi(x)].$

Uwaga 1.53. Niech $\varphi(x,y)$, gdzie $\langle x,y\rangle \in X\times Y$, będzie funkcją zdaniową. Wówczas wyrażenia: $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \bigvee_{y\in\mathbb{R}} \varphi(x,y)$ i $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \bigwedge_{y\in\mathbb{R}} \varphi(x,y)$ są zdaniami, natomiast formuły: $\bigvee_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x,y)$ i $\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} \varphi(x,y)$ są funkcjami zdaniowymi zmiennej y. W takiej sytuacji zmienną x nazywamy **zmienną związaną**, zaś zmienną y – **zmienną wolną**. Kwantyfikatory wiążą jedynie zmienne znajdujące się w ich zasięgu.

Uwaga 1.54. Zauważmy, że w przypadku, gdy rozważamy funkcję zdaniową $\varphi(x)$, której zakresem jest skończony zbiór X składający się z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, wówczas

$$\bigwedge_{x\in X} \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; (\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(a_n))$$

oraz

$$\bigvee_{x\in X} \varphi(x) \;\Leftrightarrow\; (\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \ldots \vee \varphi(a_n)).$$

W matematyce kwantyfikatory służą głównie do krótszego i bardziej precyzyjnego zapisu pewnych sformułowań występujących np. w definicjach lub twierdzeniach. Jednocześnie dzięki nim język matematyczny staje się językiem uniwersalnym (tzn. zrozumiałym bez względu na język, którym posługujemy się na co dzień). I tak np. wyrażenie:

funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nie posiada miejsc zerowych i jest ograniczona,

możemy zapisać w postaci formuły

$$\Big[\sim \Big(\bigvee_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0\Big)\Big] \ \wedge \ \Big[\bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leqslant M\Big].$$

Z kolei sformułowanie:

dla każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba naturalna K taka, że dla wszystkich liczb naturalnych n większych bądź równych K wyrazy ciągu (a_n) są większe od ε,

występujące w definicji granicy niewłaściwej ciągu liczbowego o wyrazie ogólnym a_n (zob. def. 2.39), zazwyczaj zapisujemy krótko w postaci

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (n \geqslant K \Rightarrow a_n > \varepsilon)$$

lub (zgodnie z definicją 1.52)

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N} \wedge n\geqslant K} a_n > \varepsilon.$$

Definicja 1.55. Wyrażenie logiczne zawierające funkcje zdaniowe, których wszystkie zmienne są związane kwantyfikatorami, i przyjmujące wartość logiczną 1 niezależnie od wyboru tych funkcji nazywamy **prawem rachunku kwantyfikatorów**.

Dla dowolnej funkcji zdaniowej $\varphi(x)$ o zakresie X, bezpośrednio z definicji kwantyfikatorów wynika następujące prawo rachunku kwantyfikatorów:

$$\bigwedge_{x\in X} \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad \bigvee_{x\in X} \varphi(x).$$

Twierdzenie 1.56 (Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów). *Niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową, której zakresem zmienności jest zbiór X. Wówczas*

(1) $\sim \Big[\bigwedge_{x\in X} \varphi(x)\Big] \ \Leftrightarrow \ \bigvee_{x\in X} [\sim \varphi(x)]$,

(2) $\sim \Big[\bigvee_{x\in X} \varphi(x)\Big] \ \Leftrightarrow \ \bigwedge_{x\in X} [\sim \varphi(x)]$.

Twierdzenie 1.57 (Prawa rozdzielności kwantyfikatorów względem funktorów zdaniotwórczych). *Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ będą funkcjami zdaniowymi o zakresie X oraz niech S będzie zmienną zdaniową lub funkcją zdaniową, która nie zależy w sposób efektywny od zmiennej x. Wówczas*

(1) $\bigwedge\limits_{x\in X}[\varphi(x)\wedge\psi(x)] \Leftrightarrow \Big[\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x)\wedge\bigwedge\limits_{x\in X}\psi(x)\Big]$,

(2) $\bigvee\limits_{x\in X}[\varphi(x)\vee\psi(x)] \Leftrightarrow \Big[\bigvee\limits_{x\in X}\varphi(x)\vee\bigvee\limits_{x\in X}\psi(x)\Big]$,

(3) $\bigvee\limits_{x\in X}[\varphi(x)\wedge\psi(x)] \Rightarrow \Big[\bigvee\limits_{x\in X}\varphi(x)\wedge\bigvee\limits_{x\in X}\psi(x)\Big]$,

(4) $\bigwedge\limits_{x\in X}[\varphi(x)\vee\psi(x)] \Leftarrow \Big[\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x)\vee\bigwedge\limits_{x\in X}\psi(x)\Big]$,

(5) $\bigwedge\limits_{x\in X}[\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)] \Rightarrow \Big[\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x)\Rightarrow\bigwedge\limits_{x\in X}\psi(x)\Big]$,

(6) $\bigwedge\limits_{x\in X}[\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)] \Rightarrow \Big[\bigvee\limits_{x\in X}\varphi(x)\Rightarrow\bigvee\limits_{x\in X}\psi(x)\Big]$,

(7) $\bigwedge\limits_{x\in X}[\varphi(x)\wedge S] \Leftrightarrow \Big[\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x)\wedge S\Big]$,

(8) $\bigvee\limits_{x\in X}[\varphi(x)\vee S] \Leftrightarrow \Big[\bigvee\limits_{x\in X}\varphi(x)\vee S\Big]$,

(9) $\bigwedge\limits_{x\in X}[\varphi(x)\vee S] \Leftrightarrow \Big[\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x)\vee S\Big]$,

(10) $\bigvee\limits_{x\in X}[\varphi(x)\wedge S] \Leftrightarrow \Big[\bigvee\limits_{x\in X}\varphi(x)\wedge S\Big]$.

Twierdzenie 1.58. *Niech $\varphi(x,y)$ będzie funkcją zdaniową, której zakresem zmienności jest zbiór $X\times Y$. Wówczas*

(1) $\bigwedge\limits_{x\in X}\bigwedge\limits_{y\in Y}\varphi(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{y\in Y}\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x,y)$,

(2) $\bigvee\limits_{x\in X}\bigvee\limits_{y\in Y}\varphi(x,y) \Leftrightarrow \bigvee\limits_{y\in Y}\bigvee\limits_{x\in X}\varphi(x,y)$,

(3) $\bigvee\limits_{y\in Y}\bigwedge\limits_{x\in X}\varphi(x,y) \Rightarrow \bigwedge\limits_{x\in X}\bigvee\limits_{y\in Y}\varphi(x,y)$.

1.6 Działania uogólnione na zbiorach

W teorii mnogości często pojawiają się zbiory, których elementami są inne zbiory – mówimy wówczas o **rodzinie zbiorów**. I tak np. zbiór $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ stanowi przykład czteroelementowej rodziny zbiorów, zaś zbiór $\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\dots\}$ – przykład nieskończonej rodziny zbiorów.

Definicja 1.59. Niech T będzie zbiorem niepustym, który dalej nazywać będziemy zbiorem indeksów, zaś X będzie dowolnym zbiorem. Każdemu elementowi $t\in T$ przyporządkujmy pewien podzbiór zbioru X i oznaczmy go przez A_t. Otrzymaną w ten sposób rodzinę $\{A_t : t\in T\}$ podzbiorów zbioru X nazywamy **indeksowaną rodziną zbiorów** i oznaczamy przez $\{A_t\}_{t\in T}$.

Poniżej podajemy kilka przykładów rodzin indeksowanych za pomocą różnych zbiorów indeksów:

- $\{A_t\}_{t\in\{0,1\}}$, gdzie $A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{0,1\}$,
- $\{A_t\}_{t\in\mathbb{N}}$, gdzie A_t jest zbiorem dzielników liczby $t \in \mathbb{N}$,
- $\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $A_t = (-t^2, t^2+1)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 1.60. Niech $\{A_t\}_{t\in T}$ będzie indeksowaną rodziną podzbiorów ustalonego zbioru X.

(a) **Uogólnioną sumą** rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$ nazywamy zbiór

$$\bigcup_{t\in T} A_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \bigvee_{t\in T} x \in A_t\}.$$

(b) **Uogólnionym iloczynem** rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$ nazywamy zbiór

$$\bigcap_{t\in T} A_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \bigwedge_{t\in T} x \in A_t\}.$$

W analogiczny sposób można zdefiniować działania uogólnione dla dowolnej rodziny zbiorów. W przypadku, gdy zbiór indeksów jest dwuelementowy powyższa definicja pokrywa się z definicją 1.33.

Przykład 1.61. Aby wyznaczyć sumę lub iloczyn podanej indeksowanej rodziny zbiorów należy najpierw postawić pewną hipotezę, a następnie ją udowodnić, wykorzystując m.in. odpowiednie prawa rachunku zdań i prawa rachunku kwantyfikatorów. W poniższych przykładach ograniczymy się tylko do postawienia hipotez.

(a) Niech $A_n = [1 + \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (1,5)$ oraz $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [2,4]$.

(b) Niech $A_t = (0, \frac{1}{t^2+1})$ dla $t \in \mathbb{R}$. Wówczas $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = (0,1)$ oraz $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t = \emptyset$.

Korzystając z praw de Morgana dla kwantyfikatorów, można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.62 (Prawa de Morgana dla działań uogólnionych). *Dla dowolnej indeksowanej rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$ podzbiorów ustalonego zbioru X mamy:*

(1) $\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)' = \bigcap_{t\in T} A_t'$,

(2) $\left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)' = \bigcup_{t\in T} A_t'$.