

# Spis treści

PRZEDMOWA .....	7
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....	9
13. CZWÓRNIKI.....	11
13.1. Wiadomości podstawowe.....	11
13.2. Przekształcenie macierzy charakterystycznych.....	19
13.3. Czwórniki prawidłowe i zdegenerowane.....	22
13.4. Odwracalność i symetria czwórnika.....	25
13.4.1. Czwórniki odwracalne.....	25
13.4.2. Czwórniki symetryczne.....	28
13.5. Połączenia czwórników.....	30
13.5.1. Połączenie łańcuchowe.....	30
13.5.2. Połączenie szeregowe.....	31
13.5.3. Połączenie równoległe.....	36
13.5.4. Połączenie hybrydowe.....	39
13.6. Zastosowanie czwórników w analizie obwodów.....	41
13.6.1. Czwórnikowy opis tranzystora.....	41
13.6.2. Nieoznaczona macierz admitancyjna.....	46
13.6.3. Tranzystor w połączeniu łańcuchowym.....	49
13.6.4. Wzmacniacz z równoległym sprzężeniem zwrotnym...	51
13.6.5. Wzmacniacz z szeregowym sprzężeniem zwrotnym...	55
13.7. Parametry falowe czwórników.....	58
13.7.1. Wiadomości podstawowe.....	58
13.7.2. Impedancja falowa i współczynnik przenoszenia fa- lowego.....	59
13.8. Macierz rozproszenia.....	65
14. MACIERZOWA ANALIZA OBWODÓW.....	69
14.1. Wprowadzenie.....	69
14.2. Macierze strukturalne.....	70
14.2.1. Macierz incydencji.....	70
14.2.2. Macierz oczkowa.....	73
14.2.3. Macierz fundamentalnych przekrojów.....	76
14.2.4. Macierz fundamentalnych pętli.....	79

14.2.5. Zależności pomiędzy macierzami strukturalnymi.....	82
14.3. Macierzowe ujęcie metody napięć węzłowych.....	85
14.4. Metoda fundamentalnych przekrojów.....	91
14.5. Metoda fundamentalnych pętli.....	96
14.6. Metoda oczkowa.....	99
15. ANALIZA WRAŻLIWOŚCIOWA OBWODÓW .....	103
15.1. Wprowadzenie .....	103
15.2. Analiza wrażliwościowa metodą układu wrażliwościowego....	105
15.3. Metoda układu dołączonego.....	119
16. ANALIZA OBWODÓW DYNAMICZNYCH. METODA RÓW- NAŃ STANU.....	133
16.1. Wprowadzenie.....	133
16.2. Rząd obwodu.....	134
16.3. Formułowanie równań stanu obwodów liniowych.....	137
16.4. Formułowanie równań stanu obwodów nieliniowych.....	147
17. GEOMETRYCZNA ANALIZA UKŁADÓW DRUGIEGO RZĘDU. ....	166
17.1. Wiadomości podstawowe .....	166
17.2. Liniowe obwody opisane równaniem autonomicznym.....	168
17.3. Punkty równowagi liniowych układów autonomicznych dru- giego rzędu.....	171
17.4. Rodzaje punktów równowagi.....	176
17.5. Kryteria występowania punktów osobliwych.....	180
17.6. Portret fazowy układów nieliniowych.....	182
17.7. Metoda izoklin.....	183
18. ROZWIĄZYWANIE LINIOWYCH OBWODÓW DYNAMICZ- NYCH.....	187
18.1. Wprowadzenie .....	187
18.2. Rozwiązywanie liniowych równań stanu.....	191
18.3. Macierz transmitancyjna.....	201
19. STABILNOŚĆ W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH.....	206
19.1. Wprowadzenie.....	206
19.2. Zależności podstawowe.....	207
19.3. Lokalna stabilność w układach nieliniowych. Pierwsza metoda Lapunowa.....	210
19.4. Druga metoda Lapunowa.....	219
19.5. Stabilność układów liniowych rozpatrywanych w relacji wej- ście - wyjście.....	225
19.6. Stabilność rozwarciowa i zwarciova dwójników.....	232
20. ANALIZA NUMERYCZNA OBWODÓW NIELINIOWYCH.....	237
20.1. Wstęp.....	237

20.2.	Metody formułowania równań opisujących obwody nieliniowe.....	238
20.2.1.	Metoda napięć węzłowych.....	238
20.2.2.	Metoda tablicowa.....	244
20.2.3.	Metoda hybrydowa.....	255
20.3.	Algorytm Newtona-Raphsona.....	262
20.3.1.	Wiadomości podstawowe.....	262
20.3.2.	Problem nadmiaru i zbieżności.....	268
20.4.	Modele iterowane.....	270
20.5.	Podstawy analizy obwodów dynamicznych.....	274
20.5.1.	Wprowadzenie.....	274
20.5.2.	Zależności podstawowe dotyczące liniowych metod wielokrokowych.....	285
20.5.3.	Liniowe metody dwukrokowe drugiego rzędu.....	292
21.	<b>ELEMENTY TEORII LINII DŁUGIEJ. STANY NIEUSTALONE...</b>	300
21.1.	Wstęp.....	300
21.2.	Równania linii długiej.....	301
21.3.	Równania transformat.....	306
21.4.	Równania linii z uwzględnieniem warunków brzegowych.....	309
21.5.	Analiza linii bez strat przy zerowych warunkach początkowych.....	314
21.6.	Analiza linii bez strat przy niezerowych warunkach początkowych.....	332
21.7.	Linia zrównoważona.....	335
22.	<b>LINIA DŁUGA W STANIE USTALONYM PRZY POBUDZENIU SINUSOIDALNYM.....</b>	339
22.1.	Wprowadzenie.....	339
22.2.	Czwórnikowy model linii długiej.....	347
22.3.	Przypadki szczególne linii długiej.....	352
22.3.1.	Linia dopasowana falowo.....	352
22.3.2.	Linia zrównoważona.....	352
22.4.	Linia bez strat.....	354
22.4.1.	Zależności podstawowe.....	354
22.4.2.	Linia bez strat rozwarta na końcu.....	355
22.4.3.	Linia bez strat zwarta na końcu.....	359
22.4.4.	Linia bez strat obciążona odbiornikiem.....	361
22.5.	Równania linii długiej z uwzględnieniem warunków brzegowych.....	363
	<b>LITERATURA .....</b>	367

# Przedmowa

Niniejszy podręcznik stanowi kontynuację materiału zawartego w części I. Jest on przeznaczony dla studentów drugiego i trzeciego roku jako pomoc w opanowaniu ważnych działów elektrotechniki teoretycznej i teorii obwodów, w tym komputerowej analizy obwodów. Czytelnik powinien mieć podstawową wiedzę z teorii obwodów, analizy matematycznej, rachunku macierzowego i przekształcenia Laplace'a. W celu ułatwienia studiowania niektóre zagadnienia z tego zakresu zostały powtórzone.

Znaczna część materiału ujętego w podręczniku ma charakter klasyczny. Dotyczy to w szczególności rozdziałów 13, 17, 18, 21, 22. Dość obszernie i wszechstronnie omówiono dynamikę obwodów liniowych i nieliniowych z uwzględnieniem metod obliczeniowych, teorii stabilności oraz pewnych koncepcji analizy geometrycznej, przedstawionych na przykładzie układów drugiego rzędu. Rozpatrzono również najważniejsze metody numeryczne analizy obwodów rezystancyjnych i dynamicznych. Problematykę z zakresu teorii wrażliwości zaprezentowano w sposób ogólny dla nieliniowych obwodów rezystancyjnych. Przy omawianiu poszczególnych tematów starano się podawać podstawy matematyczne, interpretację fizyczną i przykłady liczbowe.

Podręcznik jest napisany w sposób przejrzysty i systematyczny, a liczne przykłady mają na celu ułatwienie studiowania zawartych w nim treści. Niektóre zagadnienia zostały ujęte szerzej i bardziej szczegółowo w stosunku do typowego wykładu, co stwarza możliwość bardziej dogłębnego opanowania przedmiotu i rozszerza krąg potencjalnych użytkowników podręcznika o doktorantów i pracowników naukowych. Rozdziały 14, 15, 16 i 20 zawierają również wiele informacji pomocnych przy wykonywaniu prac projektowych w ramach przedmiotów: teoria obwodów i komputerowa analiza obwodów.

Autor wyraża serdeczne podziękowania obu Recenzentom niniejszego podręcznika prof. dr hab. Kazimierzowi Mikołajukowi i prof. dr hab. Stanisławowi Osowskiemu za uwagi, które przyczyniły się do udoskonalenia tekstu.

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

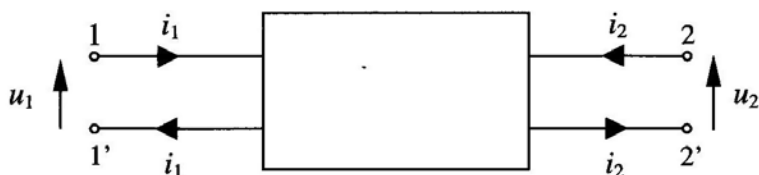
- $A$  - zredukowana macierz incydencji, macierz łańcuchowa czwórnik,
- $a$  - współczynnik tłumienia,
- $B$  - susceptancja,
- $B$  - macierz fundamentalnej pętli, macierz łańcuchowa odwrotna,
- $b$  - liczba gałęzi grafu,
- $C$  - pojemność kondensatora,
- $D$  - macierz fundamentalnych przekrojów,
- $e$  - wartość chwilowa napięcia źródłowego,
- $\bar{e}$  - transformata Laplace'a napięcia  $e$ ,
- $F$  - macierz hybrydowa odwrotna,
- $f(\cdot)$  - funkcja:  $R^n \rightarrow R^n$ ,
- $f$  - częstotliwość,
- $G$  - konduktancja,
- $H$  - macierz hybrydowa,
- $I$  - wartość symboliczna prądu,
- $I_m$  - wartość maksymalna prądu,
- $|I|$  - wartość skuteczna prądu,
- $i$  - wektor prądów,
- $i$  - wartość chwilowa prądu,
- $\bar{i}$  - transformata Laplace'a prądu,
- $\hat{i}$  - prąd układu dołączonego,
- $j$  - jedność urojona,
- $j$  - wartość chwilowa prądu,
- $L$  - indukcyjność cewki,
- $l$  - stopień licznika, długość linii,
- NPK - napięciowe prawo Kirchhoffa,
- PPK - prądowe prawo Kirchhoffa,
- $P$  - macierz modalna,
- $P$  - moc czynna,
- $p$  - przekładnia impedancyjna czwórnik,
- $p_e$  - przekładnia energetyczna czwórnik,

- $q$  - ładunek kondensatora,
- $q_1$  - współczynnik odbicia pierwotny,
- $q_2$  - współczynnik odbicia wtórny,
- $R$  - rezystancja,
- $r_1(t)$  - odpowiedź jednostkowa,
- $r_\delta(t)$  - odpowiedź impulsowa,
- $S$  - macierz rozproszenia,
- $S_i$  - wrażliwość różniczkowa,
- $s$  - pulsacja zespolona,
- $T$  - drzewo grafu, transpozycja macierzy, okres, transmitancja,
- $T(s)$  - transmitancja operatorowa,
- $U$  - wartość symboliczna napięcia,
- $U_m$  - wartość maksymalna napięcia,
- $|U|$  - wartość skuteczna napięcia,
- $u$  - wektor napięcia,
- $\bar{u}$  - transformata napięcia,
- $\hat{u}$  - napięcie układu dołączonego,
- $v$  - wartość chwilowa napięcia węzłowego, prędkość fali,
- $V$  - funkcja Lapunowa,
- $w(t)$  - energia,
- $X$  - reaktancja,
- $x$  - wektor,
- $\dot{x}$  - pochodna wektora względem czasu,
- $\tilde{x}(t)$  - forma normalna,
- $x$  - odległość od początku linii,
- $Y$  - macierz admitancyjna,
- $y$  - wektor,
- $Z$  - macierz impedancyjna,
- $Z$  - impedancja,
- $Z_f$  - impedancja falowa czwórnik lub linii długiej,
- $\alpha$  - parametr wrażliwościowy, współczynnik tłumienia,
- $\beta$  - współczynnik przesunięcia,
- $\gamma$  - współczynnik przenoszenia linii,
- $\lambda$  - wartość własna, długość fali,
- $\rho$  - opór charakterystyczny,
- $\tau$  - czas, stała czasowa,
- $\xi$  - odległość od końca linii,
- $\mathbf{1}$  - macierz jednostkowa,
- $I(t)$  - funkcja jednostkowa.

# 13. Czwórnik

## 13.1. Wiadomości podstawowe

Czwórnikami nazywamy obwód 4-zaciskowy, w którym utworzone są dwie pary końcówek mających tę właściwość, że w parze płynie ten sam prąd (rys. 13.1.1). Zaciski 11' będziemy nazywać zaciskami wejściowymi, a zaciski 22' – wyjściowymi czwórnika.



Rys. 13.1.1. Czwórnik

Będziemy rozpatrywać czwórnik liniowe i stacjonarne, które przy zerowych warunkach początkowych dadzą się zapisać co najmniej w jednej z sześciu podanych postaci.

### 1. Równanie impedancyjne

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}, \quad (13.1.1)$$

gdzie:  $\bar{u}_k = U_k(s)$ ,

$\bar{i}_k = I_k(s)$ , ( $k=1, 2$ ),

$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$  - macierz impedancyjna.

## 2. Równanie admitancyjne

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}, \quad (13.1.2)$$

gdzie

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} - \text{macierz admitancyjna.}$$

## 3. Równanie łańcuchowe

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ -\bar{i}_2 \end{bmatrix}, \quad (13.1.3)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \text{macierz łańcuchowa.}$$

Należy zwrócić uwagę, że po prawej stronie równania (13.1.3) występuje prąd  $(-\bar{i}_2)$ .

## 4. Równanie łańcuchowe odwrotne

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ -\bar{i}_1 \end{bmatrix}, \quad (13.1.4)$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} - \text{macierz łańcuchowa odwrotna.}$$

Należy zwrócić uwagę, że po prawej stronie równania (13.1.4) występuje prąd  $(-\bar{i}_1)$ .

## 5. Równanie hybrydowe

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}, \quad (13.1.5)$$



gdzie

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} - \text{macierz hybrydowa.}$$

6. Równanie hybrydowe odwrotne

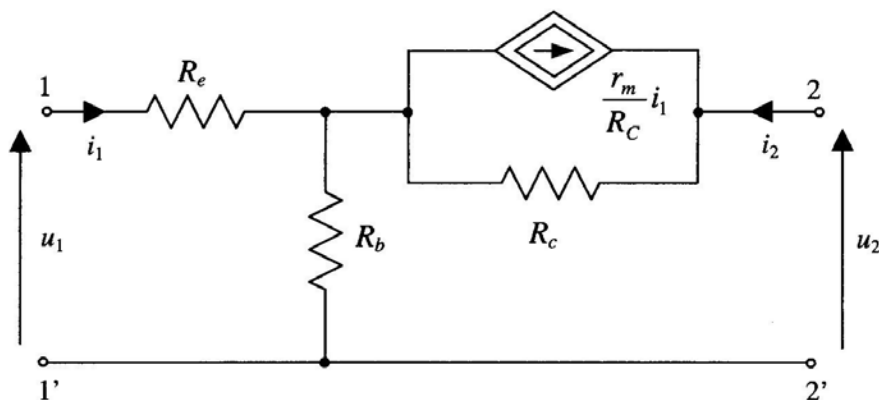
$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}, \quad (13.1.6)$$

gdzie

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} - \text{macierz hybrydowa odwrotna.}$$

Macierze  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$ , opisujące czwórniki, nazywamy macierzami charakterystycznymi. Ogólnie elementy macierzy charakterystycznych są funkcjami zmiennej zespolonej  $s$ .

Czwórniki nazywamy równoważnymi, jeżeli mają identyczne macierze charakterystyczne.



Rys. 13.1.2. Przykładowy czwórnik

Sposób wyznaczania elementów macierzy charakterystycznych omówimy na przykładzie czwórnika przedstawionego na rysunku 13.1.2. W rozpatrywanym przypadku elementy macierzy charakterystycznych nie zależą od  $s$ , wobec czego możemy posługiwać się chwilowymi wartościami napięć i prądów.

Z równania (13.1.1) wynikają następujące wzory:

$$z_{11} = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{i_2 = 0} ,$$

$$z_{21} = \frac{u_2}{i_1} \Big|_{i_2 = 0} ,$$

$$z_{12} = \frac{u_1}{i_2} \Big|_{i_1 = 0} ,$$

$$z_{22} = \frac{u_2}{i_2} \Big|_{i_1 = 0} .$$

Tak więc elementy macierzy impedancyjnej możemy wyznaczyć, rozpatrując dwa stany jałowe: strony wtórnej ( $i_2 = 0$ ) oraz strony pierwotnej ( $i_1 = 0$ ).

Dla  $i_2 = 0$  otrzymujemy:

$$u_1 = (R_e + R_b) i_1 ,$$

$$u_2 = r_m i_1 + R_b i_1 ,$$

a zatem:

$$z_{11} = R_e + R_b ,$$

$$z_{21} = r_m + R_b .$$

Dla  $i_1 = 0$  zachodzą następujące relacje:

$$u_1 = R_b i_2 ,$$

$$u_2 = (R_b + R_e) i_2 ,$$

wobec czego

$$z_{12} = R_b ,$$

$$z_{22} = R_b + R_e .$$

Ostatecznie

$$Z = \begin{bmatrix} R_e + R_b & R_b \\ R_b + r_m & R_b + R_c \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy admittancejnej  $Y$  wyznaczamy na podstawie zależności (13.1.2) z wzorów:

$$y_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2 = 0},$$

$$y_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2 = 0},$$

$$y_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1 = 0},$$

$$y_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1 = 0},$$

rozpatrując stany zwarcia strony wtórnej ( $u_2 = 0$ ) oraz strony pierwotnej ( $u_1 = 0$ ). Znając macierz  $Z$ , można łatwo obliczyć macierz  $Y$ , korzystając z wynikającej z (13.1.1) i (13.1.2) zależności

$$Y = Z^{-1}.$$

Stąd otrzymujemy

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta} & \frac{-z_{12}}{\Delta} \\ \frac{-z_{21}}{\Delta} & \frac{z_{11}}{\Delta} \end{bmatrix},$$

gdzie  $\Delta = \det Z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$ .

Elementy macierzy łańcuchowej  $A$  znajdujemy, stosując następujące wzory:

$$a_{11} = \frac{u_1}{u_2} \Big|_{i_2 = 0} ,$$

$$a_{21} = \frac{i_1}{u_2} \Big|_{i_2 = 0} ,$$

$$a_{12} = \frac{u_1}{-i_2} \Big|_{u_2 = 0} ,$$

$$a_{22} = \frac{i_1}{-i_2} \Big|_{u_2 = 0} ,$$

co wymaga rozpatrzenia stanu jałowego ( $i_2 = 0$ ) oraz stanu zwarcia ( $u_2 = 0$ ) strony wtórnej; dla  $i_2 = 0$  otrzymujemy:

$$u_1 = (R_e + R_b) i_1 ,$$

$$u_2 = r_m i_1 + R_b i_1 ,$$

a zatem

$$a_{11} = \frac{R_e + R_b}{r_m + R_b}$$

oraz

$$a_{21} = \frac{1}{r_m + R_b} .$$

Pełna macierz łańcuchowa jest następująca:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{R_e + R_b}{r_m + R_b} & \frac{(R_e - r_m)R_b + (R_e + R_b)R_c}{R_b + r_m} \\ \frac{1}{R_b + r_m} & \frac{R_c + R_b}{R_b + r_m} \end{bmatrix} .$$

Elementy macierzy  $B$  wyznaczamy z następujących wzorów:

$$b_{11} = \frac{u_2}{u_1} \Big|_{i_1 = 0} ,$$

$$b_{21} = \frac{i_2}{u_1} \Big|_{i_1 = 0} ,$$

$$b_{12} = \frac{u_2}{-i_1} \Big|_{u_1 = 0} ,$$

$$b_{22} = \frac{i_2}{-i_1} \Big|_{u_1 = 0} ,$$

rozpatrując stan jałowy ( $i_1 = 0$ ) i stan zwarcia ( $u_1 = 0$ ) strony pierwotnej.

W celu znalezienia elementów macierzy hybrydowej posługujemy się zależnościami:

$$h_{11} = \frac{u_1}{i_1} \Big|_{u_2 = 0} ,$$

$$h_{21} = \frac{i_2}{i_1} \Big|_{u_2 = 0} ,$$

$$h_{12} = \frac{u_1}{u_2} \Big|_{i_1 = 0} ,$$

$$h_{22} = \frac{i_2}{u_2} \Big|_{i_1 = 0} .$$

Wymaga to rozpatrzenia stanu zwarcia strony wtórnej ( $u_2 = 0$ ) oraz stanu jałowego strony pierwotnej ( $i_1 = 0$ ). W stanie zwarcia ( $u_2 = 0$ ) znajdujemy:

$$u_1 = R_e i_1 + R_b (i_1 + i_2) ,$$

$$R_c \left( i_2 + \frac{r_m}{R_c} i_1 \right) + R_b (i_1 + i_2) = 0 .$$

Z drugiego z powyższych równań wynika bezpośrednio

$$h_{21} = -\frac{r_m + R_b}{R_c + R_b}.$$

Uwzględniając następnie pierwsze równanie, otrzymujemy

$$h_{11} = R_e + \frac{R_b(R_c - r_m)}{R_c + R_b}.$$

Pełna macierz hybrydowa  $\mathbf{H}$  jest następująca

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} R_e + \frac{R_b(R_c - r_m)}{R_b + R_c} & \frac{R_b}{R_b + R_c} \\ -\frac{r_m + R_b}{R_b + R_c} & \frac{1}{R_b + R_c} \end{bmatrix},$$

zaś macierz hybrydową odwrotną  $\mathbf{F}$  możemy obliczyć z wzoru

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{H}} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}.$$

### Uwaga

W celu zbudowania żądanych równań czwórnikowych nie jest konieczne rozpatrywanie stanów zwarcia i rozwarcia, jak to pokazano powyżej. Wystarczy sformułować układ równań opisujących obwód na podstawie praw Kirchhoffa i Ohma, a następnie rozwiązać go względem odpowiedniej pary zmiennych. W obwodzie pokazanym na rys. 13.1.2 otrzymujemy w ten sposób:

$$u_1 = R_e i_1 + R_b (i_1 + i_2), \quad (13.1.7)$$

$$u_2 = R_c \left( i_2 + \frac{r_m}{R_c} i_1 \right) + R_b (i_1 + i_2).$$

Stąd, po uporządkowaniu, dochodzimy do równań impedancyjnych:

$$u_1 = (R_e + R_b) i_1 + R_b i_2,$$

$$u_2 = (R_b + r_m) i_1 + (R_b + R_c) i_2.$$

Natomiast rozwiązując układ równań (13.1.7) względem  $u_1, i_1$  otrzymujemy równania łańcuchowe:

$$u_1 = \frac{R_e + R_b}{R_b + r_m} u_2 + \frac{(R_e - r_m)R_b + (R_e + R_b)R_c}{R_b + r_m} (-i_2),$$

$$i_1 = \frac{1}{R_b + r_m} u_2 + \frac{R_b + R_c}{R_b + r_m} (-i_2).$$

Omówiona wyżej metoda wiąże się z zagadnieniem przekształcania macierzy charakterystycznych przedstawionym w kolejnym rozdziale.

## 13.2. Przekształcanie macierzy charakterystycznych

Rozpatrywany w rozdziale 13.1 przykład pozwolił ustalić zależności pomiędzy elementami macierzy  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{Y}$ , oraz  $\mathbf{H}$  i  $\mathbf{F}$ . W ogólnym przypadku interesuje nas związek pomiędzy elementami dowolnych dwóch, spośród sześciu, macierzy charakterystycznych. Znajomość takich zależności pozwala na łatwe przejście od jednego opisu czwórnika do innego, bardziej w danym zagadnieniu użytecznego. Jeżeli np. chcemy wyznaczyć macierz  $\mathbf{H}$  w zależności od znanej macierzy  $\mathbf{Y}$ , to skorzystamy z równania admitancyjnego

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}. \quad (13.2.1)$$

Równanie to należy rozwiązać względem  $\bar{u}_1$  oraz  $\bar{i}_2$ . W tym celu równanie (13.2.1) przedstawiamy w postaci

$$\begin{bmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y_{12} \\ 0 & -y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

i wyznaczamy wektor  $\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\det \mathbf{Y}}{y_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix},$$

znajdując tym samym macierz  $\mathbf{H}$ , uzależnioną od macierzy  $\mathbf{Y}$ .

Związki pomiędzy wszystkimi macierzami charakterystycznymi czwórnika podano w tabeli 13.1.

Tabela 13.1

Zależności pomiędzy elementami różnych macierzy charakterystycznych

	<b>Y</b>	<b>Z</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>H</b>	<b>F</b>
<b>Y</b>	$y_{11}$ $y_{12}$ $y_{21}$ $y_{22}$	$\frac{z_{22}}{\det Z}$ $\frac{-z_{12}}{\det Z}$ $\frac{-z_{21}}{\det Z}$ $\frac{z_{11}}{\det Z}$	$\frac{a_{22}}{a_{12}}$ $\frac{-\det A}{a_{12}}$ $\frac{a_{11}}{-1}$ $\frac{a_{12}}{a_{12}}$	$\frac{b_{11}}{b_{12}}$ $\frac{-1}{\det B}$ $\frac{b_{21}}{b_{22}}$ $\frac{b_{12}}{b_{12}}$	$\frac{1}{h_{11}}$ $\frac{-h_{12}}{h_{21}}$ $\frac{h_{11}}{\det H}$ $\frac{h_{11}}{h_{11}}$	$\frac{\det F}{f_{22}}$ $\frac{f_{12}}{-f_{21}}$ $\frac{f_{22}}{f_{22}}$ $\frac{1}{f_{22}}$
<b>Z</b>	$\frac{y_{22}}{\det Y}$ $\frac{-y_{12}}{\det Y}$ $\frac{y_{21}}{\det Y}$ $\frac{-y_{11}}{\det Y}$	$z_{11}$ $z_{12}$ $z_{21}$ $z_{22}$	$\frac{a_{11}}{a_{21}}$ $\frac{\det A}{a_{21}}$ $\frac{a_{12}}{1}$ $\frac{a_{22}}{a_{21}}$	$\frac{b_{22}}{b_{21}}$ $\frac{\det B}{b_{21}}$ $\frac{1}{b_{11}}$ $\frac{b_{21}}{b_{21}}$	$\frac{\det H}{h_{22}}$ $\frac{h_{12}}{-h_{21}}$ $\frac{h_{22}}{1}$ $\frac{h_{22}}{h_{22}}$	$\frac{1}{f_{11}}$ $\frac{-f_{12}}{f_{21}}$ $\frac{f_{11}}{\det F}$ $\frac{f_{11}}{f_{11}}$
<b>A</b>	$\frac{-y_{22}}{\det Y}$ $\frac{y_{21}}{-\det Y}$ $\frac{-1}{y_{21}}$ $\frac{-y_{11}}{y_{21}}$	$\frac{z_{11}}{\det Z}$ $z_{21}$ $1$ $z_{21}$	$a_{11}$ $a_{12}$ $a_{21}$ $a_{22}$	$\frac{b_{22}}{\det B}$ $\frac{b_{12}}{\det B}$ $\frac{b_{21}}{b_{11}}$ $\frac{\det B}{\det B}$	$\frac{-\det H}{h_{21}}$ $\frac{-h_{11}}{h_{21}}$ $\frac{-1}{-h_{22}}$ $\frac{h_{21}}{h_{21}}$	$\frac{1}{f_{21}}$ $\frac{f_{22}}{f_{21}}$ $\frac{\det F}{f_{11}}$ $\frac{f_{21}}{f_{21}}$
<b>B</b>	$\frac{-y_{11}}{\det Y}$ $\frac{y_{12}}{-\det Y}$ $\frac{-1}{-y_{22}}$ $\frac{y_{12}}{y_{12}}$	$\frac{z_{22}}{\det Z}$ $z_{12}$ $1$ $z_{12}$	$\frac{a_{22}}{\det A}$ $\frac{a_{12}}{\det A}$ $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ $\frac{\det A}{\det A}$	$b_{11}$ $b_{12}$ $b_{21}$ $b_{22}$	$\frac{1}{h_{12}}$ $\frac{h_{11}}{h_{12}}$ $\frac{h_{22}}{\det H}$ $\frac{h_{12}}{h_{12}}$	$\frac{-\det F}{f_{12}}$ $\frac{f_{22}}{-f_{11}}$ $\frac{f_{12}}{-1}$ $\frac{f_{12}}{f_{12}}$



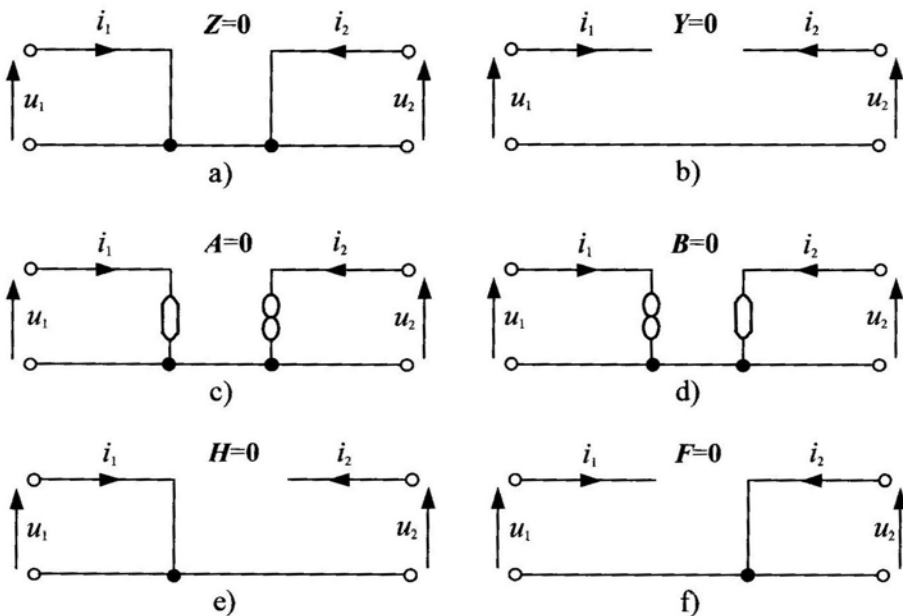
Tabela 13.1 (cd)

<b>H</b>	$\frac{1}{y_{11}}$ $\frac{-y_{12}}{y_{11}}$ $\frac{y_{11}}{y_{21}}$ $\frac{\det Y}{y_{11}}$	$\frac{\det Z}{z_{22}}$ $\frac{z_{12}}{z_{22}}$ $\frac{z_{22}}{-z_{21}}$ $\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{a_{12}}{a_{22}}$ $\frac{a_{22}}{-1}$ $\frac{-1}{a_{22}}$ $\frac{a_{22}}{a_{22}}$	$\frac{\det A}{a_{22}}$ $\frac{a_{22}}{a_{21}}$ $\frac{a_{21}}{a_{22}}$ $\frac{a_{22}}{a_{22}}$	$\frac{b_{12}}{b_{11}}$ $\frac{b_{11}}{-\det B}$ $\frac{-\det B}{b_{11}}$ $\frac{b_{21}}{b_{11}}$	$\frac{h_{11}}{h_{21}}$ $\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{f_{22}}{\det F}$ $\frac{f_{21}}{\det F}$ $\frac{f_{12}}{\det F}$ $\frac{f_{11}}{\det F}$
<b>F</b>	$\frac{\det Y}{y_{22}}$ $\frac{y_{12}}{y_{22}}$ $\frac{y_{22}}{-y_{21}}$ $\frac{1}{y_{22}}$	$\frac{1}{z_{11}}$ $\frac{-z_{12}}{z_{11}}$ $\frac{z_{11}}{z_{21}}$ $\frac{\det Z}{z_{11}}$	$\frac{a_{21}}{a_{11}}$ $\frac{-\det A}{a_{11}}$ $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ $\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\frac{-\det A}{a_{21}}$ $\frac{a_{11}}{a_{12}}$ $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ $\frac{a_{11}}{a_{11}}$	$\frac{b_{21}}{b_{22}}$ $\frac{-1}{b_{22}}$ $\frac{b_{22}}{\det B}$ $\frac{b_{12}}{b_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\det H}$ $\frac{h_{21}}{\det H}$ $\frac{h_{22}}{\det H}$ $\frac{h_{21}}{\det H}$	$\frac{f_{11}}{\det F}$ $\frac{f_{21}}{\det F}$ $\frac{f_{12}}{\det F}$ $\frac{f_{22}}{\det F}$
	<b>Y</b>	<b>Z</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>H</b>	<b>F</b>	

### 13.3. Czwórniki prawidłowe i zdegenerowane

Czwórnik nazywamy prawidłowym, jeżeli ma wszystkie macierze charakterystyczne. Z tabeli 13.1 wynika, że czwórnik jest prawidłowy wtedy i tylko wtedy, kiedy ma którąkolwiek z macierzy  $Z$ ,  $Y$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $F$ , nieosobliwą i o wszystkich elementach różnych od zera.

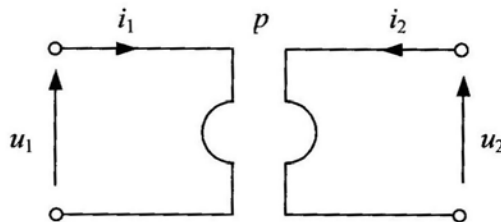
Czwórnik, który nie jest prawidłowy, nazywamy zdegenerowanym. Czwórnik mający tylko jedną macierz charakterystyczną nazywamy czwórnikiem zerowym. Macierz charakterystyczna czwórnika zerowego ma wszystkie elementy równe zero. Na rysunku 13.3.1 podano przykłady czwórników zerowych.



Rys. 13.3.1 Czwórniki zerowe

Poniżej rozpatrzmy kilka zdegenerowanych czwórników niezerowych.

#### 1. Transformator idealny (rys. 13.3.2)



Rys. 13.3.2. Transformator idealny

Równanie transformatora idealnego:

$$\begin{aligned} u_1 &= pu_2, \\ i_1 &= -p^{-1}i_2, \end{aligned} \tag{13.3.1}$$

można bezpośrednio zapisać w postaci łańcuchowej (13.1.3)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix},$$

a zatem

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Następnie na podstawie równań (13.3.1) znajdujemy

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz  $\mathbf{H}$  jest nieosobliwa, więc istnieje macierz hybrydowa odwrotna

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -p^{-1} \\ p^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformator idealny nie ma natomiast macierzy  $\mathbf{Z}$  i  $\mathbf{Y}$ . Rzeczywiście, w celu wyznaczenia macierzy  $\mathbf{Z}$ , zapiszemy równanie (13.3.1) w postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Ze względu na osobliwość macierzy  $\begin{bmatrix} 1 & -p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  oraz  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & p^{-1} \end{bmatrix}$  nie można z powyższego równania wyznaczyć ani wektora  $[u_1 \ u_2]^T$ , ani  $[i_1 \ i_2]^T$ . Nie istnieją

więc równania impedancyjne i admityncyjne, a tym samym macierze  $Z$  i  $Y$ . Transformator idealny jest przykładem zdegenerowanego, niezerowego czwórniaka posiadającego macierze  $A$ ,  $B$ ,  $H$ ,  $F$ .

## 2. Żyrator idealny (rys. 13.3.3)

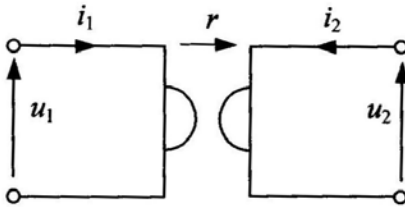
Na podstawie równań żyratora idealnego:

$$\begin{aligned} u_1 &= -r i_2, \\ u_2 &= r i_1, \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

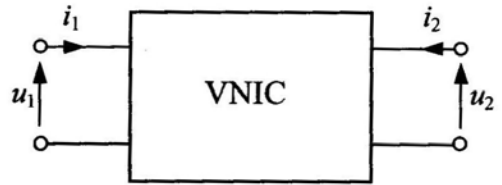
znajdujemy następujące macierze charakterystyczne:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & r^{-1} \\ -r^{-1} & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r^{-1} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ -r^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Żyrator idealny nie ma macierzy hybrydowych  $H$  i  $F$ .



Rys. 13.3.3 Żyrator idealny



Rys. 13.3.4. Czwórnik VNIC

## 3. Konwerter ujemno-impedancyjny z inwersją napięcia (VNIC) (rys. 13.3.4)

Na podstawie równań czwórniaka VNIC:

$$\begin{aligned} u_1 &= -k u_2, \\ i_1 &= -i_2, \end{aligned} \quad (13.3.3)$$

znajdujemy

$$A = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -k^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -k^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Nie istnieją natomiast macierze  $Z$  i  $Y$ .

## 13.4. Odwracalność i symetria czwórnika

### 13.4.1. Czwórnik odwracalny

Rozpatrzmy czwórnik przy zerowych warunkach początkowych i dwa jego stany, określone wektorami  $\mathbf{u}^{(1)} = [\bar{u}_1^{(1)} \bar{u}_2^{(1)}]^T$ ,  $\mathbf{i}^{(1)} = [\bar{i}_1^{(1)} \bar{i}_2^{(1)}]^T$  oraz  $\mathbf{u}^{(2)} = [\bar{u}_1^{(2)} \bar{u}_2^{(2)}]^T$ ,  $\mathbf{i}^{(2)} = [\bar{i}_1^{(2)} \bar{i}_2^{(2)}]^T$ . Te stany są wynikiem pewnych wymuszeń prądowych lub napięciowych od strony zacisków pierwotnych i wtórnych.

Czwórnik nazywamy odwracalnym, jeżeli dla każdej pary jego stanów zachodzi równość

$$\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)^T \mathbf{i}^{(2)} = \left(\mathbf{u}^{(2)}\right)^T \mathbf{i}^{(1)}, \quad (13.4.1)$$

czyli

$$\bar{u}_1^{(1)} \bar{i}_1^{(2)} + \bar{u}_2^{(1)} \bar{i}_2^{(2)} = \bar{u}_1^{(2)} \bar{i}_1^{(1)} + \bar{u}_2^{(2)} \bar{i}_2^{(1)}. \quad (13.4.2)$$

W przeciwnym przypadku czwórnik jest nieodwracalny.

Wykażemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby czwórnik opisany równaniem admitancyjnym był odwracalny, jest spełnienie zależności  $y_{12} = y_{21}$ .

#### Dowód warunku koniecznego

Zakładamy, że czwórnik, opisany równaniem admitancyjnym, jest odwracalny, a zatem spełniona jest relacja (13.4.1). Zachodzą ponadto zależności:

$$\mathbf{i}^{(1)} = \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(1)}, \quad (13.4.3)$$

$$\mathbf{i}^{(2)} = \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(2)}. \quad (13.4.4)$$

Uwzględniając (13.4.3) i (13.4.4) w (13.4.1), otrzymujemy

$$\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(2)} = \left(\mathbf{u}^{(2)}\right)^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(1)}. \quad (13.4.5)$$

Przekształcamy prawą stronę równania (13.4.5) w następujący sposób

$$\left(\mathbf{u}^{(2)}\right)^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(1)} = \left( \left(\mathbf{u}^{(1)}\right)^T \mathbf{Y}^T \mathbf{u}^{(2)} \right)^T = \left(\mathbf{u}^{(1)}\right)^T \mathbf{Y}^T \mathbf{u}^{(2)}.$$

Otrzymaliśmy więc równość

$$\left(\mathbf{u}^{(1)}\right)^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(2)} = \left(\mathbf{u}^{(1)}\right)^T \mathbf{Y}^T \mathbf{u}^{(2)},$$

słuszną dla każdej pary  $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ ; zatem

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T,$$

czyli

$$y_{12} = y_{21}.$$

### Dowód warunku wystarczającego

Jeżeli  $y_{12} = y_{21}$ , a zatem  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T$ , to zachodzi zależność

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(1)})^T \mathbf{i}^{(2)} &= (\mathbf{u}^{(1)})^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(2)} = (\mathbf{u}^{(1)})^T \mathbf{Y}^T \mathbf{u}^{(2)} = \\ &= \left( (\mathbf{u}^{(2)})^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(1)} \right)^T = (\mathbf{u}^{(2)})^T \mathbf{Y} \mathbf{u}^{(1)} = (\mathbf{u}^{(2)})^T \mathbf{i}^{(1)}, \end{aligned}$$

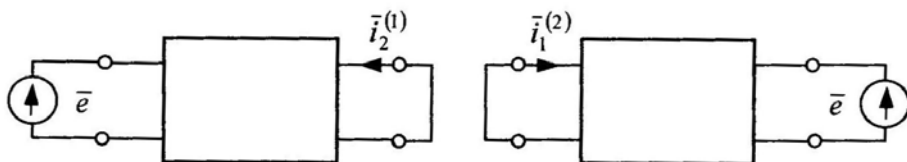
czyli spełniony jest warunek (13.4.1).

Podobnie można określić warunki konieczne i wystarczające odwracalności czwórnika, opisanego pozostałymi macierzami charakterystycznymi. Warunki te są następujące:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{Z} & z_{12} = z_{21} \\ \mathbf{A} & \det \mathbf{A} = 1 \\ \mathbf{B} & \det \mathbf{B} = 1 \\ \mathbf{H} & h_{12} = -h_{21} \\ \mathbf{F} & f_{12} = -f_{21}. \end{array}$$

Odwracalność czwórnika można również sformułować na podstawie twierdzenia o wzajemności. Rozpatrzmy czwórnik opisany macierzą admitancyjną. Wykażemy, że taki czwórnik jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, kiedy spełnia twierdzenie o wzajemności. W tym celu zakładamy, że zachodzi twierdzenie o wzajemności oczkowe (patrz rys. 13.4.1), czyli

$$\bar{i}_2^{(1)} = \bar{i}_1^{(2)}. \quad (13.4.6)$$



Rys. 13.4.1. Ilustracja twierdzenia o wzajemności oczkowego

Na podstawie równań admitancyjnych znajdujemy

$$\bar{i}_2^{(1)} = y_{21}\bar{e}$$

oraz

$$\bar{i}_1^{(2)} = y_{12}\bar{e} .$$

Stąd, uwzględniając (13.4.6), otrzymujemy

$$y_{12} = y_{21} ,$$

co oznacza, że czwórnik jest odwracalny.

Założmy obecnie, że czwórnik jest odwracalny, czyli spełniona jest zależność (13.4.1). Dowód, że zachodzi twierdzenie o wzajemności, przeprowadzamy analogicznie jak w rozdziale 4.5 części I podręcznika.

### Przykład 13.1

1. Transformator idealny opisany równaniem łańcuchowym

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ -\bar{i}_2 \end{bmatrix}$$

jest czwórnikiem odwracalnym, bowiem  $\det A = 1$ .

2. Czwórnik INIC opisany równaniem łańcuchowym

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ -\bar{i}_2 \end{bmatrix} \quad k > 0$$

jest czwórnikiem nieodwracalnym, bowiem  $\det A = -\frac{1}{k} < 0$ . Podobnie dowodzi się, że czwórnik VNIC jest nieodwracalny.

3. Żyrator idealny opisany równaniem impedancyjnym

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}$$

jest czwórnikiem nieodwracalnym, gdyż  $z_{12} \neq z_{21}$ .

Można wykazać, że każdy czwórnik zbudowany z elementów RLCM jest czwórnikiem odwracalnym.

### 13.4.2. Czwórnik symetryczny

W klasie czwórników odwracalnych wyodrębnimy podklasę czwórników symetrycznych. Są to czwórnik, których równania nie ulegają zmianie w wyniku zamiany  $\bar{u}_1 \leftrightarrow \bar{u}_2$  oraz  $\bar{i}_1 \leftrightarrow \bar{i}_2$ . Zatem w czwórniku symetrycznym zamiana zacisków wejściowych i wyjściowych nie powoduje żadnych zmian w opisie matematycznym tego czwórnika.

Rozpatrzmy czwórnik odwracalny opisany macierzą  $Z$ . Wykażemy, że warunkiem koniecznym i wystarczającym symetrii takiego czwórnika jest, aby  $z_{11} = z_{22}$ .

1. Załóżmy, że czwórnik odwracalny opisany równaniem impedancyjnym

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} \quad (13.4.7)$$

jest symetryczny, wówczas

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_2 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix},$$

a zatem

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{22} & z_{12} \\ z_{12} & z_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}. \quad (13.4.8)$$

Porównując macierze impedancyjne w równaniach (13.4.7) i (13.4.8), otrzymujemy

$$z_{11} = z_{22}.$$

2. Załóżmy, że dla czwórnika odwracalnego ( $z_{12} = z_{21}$ ) zachodzi warunek  $z_{11} = z_{22}$ , wówczas

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix},$$

a stąd wynika, że



$$\begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_2 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix},$$

czyli w wyniku zamiany  $\bar{u}_1 \leftrightarrow \bar{u}_2$  oraz  $\bar{i}_1 \leftrightarrow \bar{i}_2$  równanie czwórnika nie uległo zmianie, wobec czego czwórnik jest symetryczny.

Warunek konieczny i wystarczający symetrii czwórnika odwracalnego, wyrażony w zależności od elementów innych macierzy charakterystycznych, jest następujący:

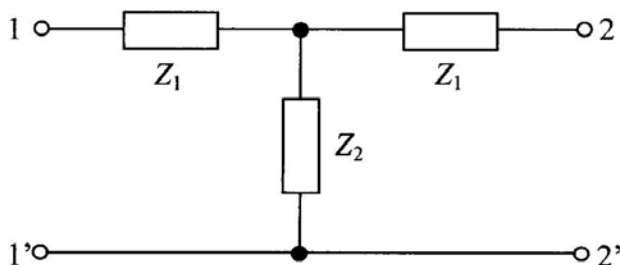
$$\begin{aligned} y_{11} &= y_{22}, \\ a_{11} &= a_{22}, \\ b_{11} &= b_{22}, \\ \det \mathbf{H} &= 1, \\ \det \mathbf{F} &= 1. \end{aligned}$$

### Przykład 13.2

Czwórnik typu  $T$  (przedstawiony na rysunku 13.4.2) ma następującą macierz łańcuchową

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{z_1}{z_2} & 2z_1 + \frac{z_1^2}{z_2} \\ \frac{1}{z_2} & 1 + \frac{z_1}{z_2} \end{bmatrix},$$

przy czym  $\det \mathbf{A} = 1$  oraz  $a_{11} = a_{22}$ ; czwórnik jest więc odwracalny i symetryczny, co jest bezpośrednio widoczne na rysunku 13.4.2.



Rys. 13.4.2. Czwórnik symetryczny