

SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń	5
Przedmowa	9
1. Wprowadzenie	11
2. Podstawy elektromechanicznego przetwarzania energii	15
2.1. Równania pola elektromagnetycznego	15
2.2. Indukowana siła elektromotoryczna	20
2.3. Zasady zachowania energii i pędu	28
3. Struktury maszyn z magnesami trwałymi	39
3.1. Topologia budowy przetworników elektromechanicznych	39
3.2. Obwody magnetyczne maszyn z magnesami trwałymi	44
3.3. Uzwojenia w maszynach prądu przemiennego	51
3.4. Własności magnetyczne magnesów trwałych	63
4. Wstępny projekt maszyny	69
4.1. Wprowadzenie	69
4.2. Ustalenie wymiarów obwodu magnetycznego	70
4.3. Siła elektromotoryczna indukowana przez magnesy trwałe	77
4.4. Siła elektromotoryczna reakcji twornika	84
4.5. Wykres wskazowy i moment elektromagnetyczny	99
4.6. Oszacowanie przyrostu temperatury uzwojeń i magnesów	108
5. Równania elektrodynamiki ośrodków ciągłych	125
5.1. Przestrzenny rozkład energii pola magnetycznego	125
5.2. Tensor naprężeń	134
5.3. Naprężenia magnetyczne	141
5.4. Siły magnetyczne	146
6. Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych	161
6.1. Wektor przemieszczeń i tensor odkształceń	161
6.2. Równania ruchu dla ośrodków klasycznych	167
6.3. Zasada zachowania energii	178
6.4. Równania ruchu prostych struktur geometrycznych dla przebiegów harmonicznym w czasie	180
6.4.1. Swobodnie podparta belka o prostokątnym przekroju	180
6.4.2. Swobodnie podparty pierścień o stałej grubości – opis za pomocą przemieszczeń	187

6.4.3.	Swobodnie podparty pierścień o stałej grubości – opis za pomocą przemieszczeń i obrotów	195
6.4.4.	Drgania wykroju blachy rdzenia stojana maszyny elektrycznej o strumieniu radialnym	199
7.	Emisja mocy akustycznej	209
7.1.	Równanie falowe	209
7.2.	Fala płaska i fala kulista	212
7.3.	Superpozycja fal akustycznych – interferencja	221
7.4.	Cylindryczne źródło dźwięku	236
7.5.	Ugięcie fali akustycznej – dyfrakcja	251
8.	Matematyczne podstawy numerycznych obliczeń wibroakustycznych	255
8.1.	Przestrzenie liniowe	255
8.2.	Przekształcenie Fouriera	261
8.3.	Dyskretna transformata Fouriera	266
8.4.	Dwuwymiarowa dyskretna transformata Fouriera	274
9.	Drgania układów o skończonej liczbie stopni swobody	279
9.1.	Oscylator harmoniczny	279
9.2.	Drgania układów o wielu stopniach swobody	284
9.3.	Wpływ warunków brzegowych na postacie drgań wykroju blach stojana	290
9.4.	Udział wirnika w drganiach stojana	296
9.4.1.	Wprowadzenie	296
9.4.2.	Drgania poprzeczne przemieszczeniowe	301
9.4.3.	Drgania poprzeczne skrętne	307
9.4.4.	Modelowanie połączenia stojana i wirnika	313
10.	Analiza spektralna silników z magnesami trwałymi	317
10.1.	Widmo modalno-częstotliwościowe naprężeń magnetycznych w szczelinie	317
10.1.1.	Przygotowanie modelu numerycznego maszyny	317
10.1.2.	Wyznaczenie naprężeń i sił magnetycznych	320
10.1.3.	Uwzględnienie trójwymiarowych efektów magnetycznych w dwuwymiarowym modelu silnika	329
10.2.	Synteza modalna odpowiedzi częstotliwościowej konstrukcji silnika	336
10.3.	Emisja akustyczna	344
Załączniki		
A	Wybrane definicje i tożsamości całkowite w algebrze wektorów	353
B	Zależności definicyjne liczb zespolonych	355
Summary		357

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

Zasady stosowanej notacji matematycznej

- a – wielkość skalarna
- a** – wielkość wektorowa w przestrzeni kartezjańskiej
- a**·**b** – iloczyn skalarny w przestrzeni kartezjańskiej
- a**×**b** – iloczyn wektorowy w przestrzeni kartezjańskiej
- {a} – wektor (kolumna macierzy) w N-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej E_N
- [A] – macierz M,N-wymiarowa
- {a}^T{b} – iloczyn skalarny w N-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej E_N
- <a,b> – iloczyn skalarny w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem L_2
- $a_{kj}b_k$ – suma iloczynów po zakresie zmienności powtórnego wskaźnika,
 $\sum_k a_{kj}b_k$
- \underline{a} – wielkość zespolona
- \underline{a}^* – wielkość zespolona sprzężona
- δa – dowolnie mały przyrost wielkości

Oznaczenia wielkości fizycznych

Ze względu na szeroki zakres zjawisk omawianych w monografii nie uniknięto w kilku przypadkach zastosowania tego samego symbolu do oznaczenia różnych wielkości fizycznych. Zdecydowano użyć oznaczeń powszechnie stosowanych w literaturze przedmiotu przy jednoczesnym wyraźnym ich opisie w tekście danego rozdziału.

- A** – magnetyczny potencjał wektorowy, [Tm]
- B** – wektor indukcji magnetycznej, [T]
- B_r** – indukcja remanencji, [T]
- c_p** – prędkość fazowa fali podłużnej, [m/s]
- c_s** – prędkość fazowa fali poprzecznej, [m/s]
- c_{nj}** – kosinus kąta pomiędzy osiami n, j, [-]
- D** – wektor indukcji elektrycznej, [As/m²]
- E** – wektor natężenia pola elektrycznego, [V/m]
- E_k** – ortotropowy moduł sprężystości Younga (wzdłuż osi k-tej), [N/m²]
- E** – izotropowy moduł sprężystości Younga, [N/m²]
- e** – wartość chwilowa siły elektromotorycznej, [V]

f	–	częstotliwość, [Hz]
\mathbf{F}	–	wektor siły, [N]
\mathbf{f}_V	–	wektor objętościowej gęstości siły, [N/m ³]
\mathbf{f}_S	–	wektor powierzchniowej gęstości siły, [N/m ²]
G_{ik}	–	ortotropowym moduł sprężystości postaci (w płaszczyźnie i, k), [N/m ²]
G	–	izotropowy moduł sprężystości postaci, [N/m ²]
\mathbf{H}	–	wektor natężenia pola magnetycznego, [A/m]
H_{cB}	–	natężenie koercji od magnesowujące, [A/m]
H_{cM}	–	natężenie koercji rozmagnesowujące, [A/m]
\mathbf{I}	–	wektor natężenia dźwięku, [W/m ²]
i	–	wartość chwilowa natężenia prądu elektrycznego, [A]
I	–	wartość skuteczna natężenia prądu elektrycznego, [A]
I_m	–	wartość maksymalna natężenia prądu elektrycznego, [A]
\mathbf{J}	–	wektor gęstości prądu, [A/m ²]
\mathbf{k}	–	wektor falowy, [rad/m]
k_E	–	stała siły elektromotorycznej rotacji, $k_E = \Omega N L r_\delta$ [V/T]
k_V	–	współczynnik objętościowego zapelnienia żłobka miedzią, [-]
K_V	–	moduł ściśliwości, [N/m ²]
L	–	indukcyjność, [H]
L_i	–	rozmiar obwodu magnetycznego prostopadle do kierunku obrotu, [m]
\mathbf{M}	–	wektor polaryzacji magnetycznej, [T]
M	–	masa, [kg]
n	–	prędkość obrotowa, [obr/s]
N	–	liczba zwojów, [-]
p	–	liczba par biegunów, [-]
p_a	–	ciśnienie akustyczne, [N/m ²]
p_Q	–	objętościowa gęstość mocy cieplnej, [W/m ³]
P_{em}	–	moc czynna elektromagnetyczna, [W]
P_{me}	–	moc czynna mechaniczna, [W]
q	–	liczba żłobków na biegun i fazę, ładunek elektryczny, [-], [C]
Q	–	ciepło, [J]
Q_s	–	liczba żłobków w stojanie, [-]
r	–	promień, [m]
R	–	rezystancja, [Ω]
$S(l)$	–	otwarta powierzchnia o brzegu l , [m ²]
t	–	czas, [s]
T_{em}	–	moment elektromagnetyczny, [Nm]

T_{me}	– moment mechaniczny, [Nm]
\mathbf{u}	– wektor przemieszczenia, [m]
u_k	– składowa wektora przemieszczenia wzdłuż k-tej osi, [m]
u	– wartość chwilowa napięcia elektrycznego, [V]
U	– wartość skuteczna napięcia elektrycznego, [V]
U_m	– wartość maksymalna napięcia elektrycznego, [V]
\mathbf{v}	– prędkość liniowa, [m/s]
v_k	– składowa wektora prędkości wzdłuż k-tej osi, [m/s]
$V(S)$	– objętość o powierzchni zewnętrznej S , [m ³]
w	– gęstość energii, [J/m ³]
w'	– gęstość koenergii, [J/m ³]
W	– energia, [J]
W'	– koenergia, [J]
W_a	– moc akustyczna, [W]
\mathbf{Y}	– powierzchniowa gęstość strumienia mocy cieplnej, [W/m ²]
0xyz	– globalny kartezjański układ współrzędnych
0rαz	– globalny cylindryczny układ współrzędnych
0nr	– lokalny kartezjański układ współrzędnych 2D (kierunki normalny i styczny do konturu)
0dq	– kartezjański układ współrzędnych fazowych w przestrzeni
<u>0dq</u>	– kartezjański układ współrzędnych fazowych w czasie
α	– współrzędna kątowna cylindrycznego układu nieruchomego względem stojana, [rad]
β	– współrzędna kątowna cylindrycznego układu nieruchomego względem wirnika, [rad]
δ	– szczelina pomiędzy stojanem i wirnikiem, operator przyrostu, [m]
δ_v	– względny przyrost objętości, [-]
δ_{ij}	– symbol Kroneckera, [-]
ϕ	– skalarny potencjał magnetyczny, [A/m ²]
γ	– konduktywność elektryczna, [S/m]
ϵ_0	– przenikalność dielektryczna próżni, $1/(c^2 \mu_0)$, [Vm/As]
ϵ_r	– przenikalność dielektryczna względna, [-]
ϵ_{ij}	– składnik tensora odkształceń, [-]
$\{\epsilon\}$	– tensor odkształceń w zwężonej notacji Voigta, $\{\epsilon\} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_6]^T$, [-]
ϑ	– temperatura, [deg]
$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$	– ortotropowe współczynniki cieplnej przewodności właściwej, [W/m deg]

λ_L	– stała sprężystości Lamè'go, [N/m ²]
Λ	– długość fali, [m]
μ_0	– przenikalność magnetyczna próżni, $4\pi \cdot 10^{-7}$, [H/m]
μ_r	– przenikalność magnetyczna względna, [-]
ν	– liczba Poissona w materiale izotropowym, [-]
ν_{ik}	– ortotropowa liczba Poissona (w płaszczyźnie i, k), [-]
ρ	– gęstość masy, gęstość ładunku elektrycznego, [kg/m ³], [C/m ³]
σ_{kj}	– składnik tensora naprężeń, [N/m ²]
$\{\sigma\}$	– tensor naprężeń w zwężonej notacji Voigta, $\{\sigma\} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6]^T$, [N/m ²]
$\underline{\sigma}_e$	– zespolony współczynnik emisji akustycznej, [-]
Φ	– strumień magnetyczny, [Tm ²]
Φ_a	– potencjał prędkości (akustyczny), [m ² /s]
Ψ	– strumień magnetyczny skojarzony, [Tm ²]
ψ	– kąt geometryczny pomiędzy osią podłużną wirnika d i osią pola reakcji stojana, [rad]
ψ_p	– kąt fazowy pomiędzy osią podłużną wirnika d i osią pola reakcji stojana, $\psi_p = p\psi$, [rad]
ξ	– przemieszczenie kątowe, [rad]
ω	– pulsacja (częstość) elektryczna, [rad/s]
ω_{ij}	– składnik tensora obrotów, [-]
Ω	– częstość kołowa mechaniczna, [rad/s]
ϖ	– skalarny potencjał elektryczny, [V/m]
∇	– operator nabra, [1/m]

PRZEDMOWA

Niniejsza książka jest poświęcona przede wszystkim omówieniu podstaw fizycznych procesu generacji drgań i hałasu o pochodzeniu elektromagnetycznym w bezszczotkowych maszynach elektrycznych wzbudzanych magnesami trwałymi. Maszyny te, ze względu na bardzo dobre własności eksploatacyjne, są obecnie produkowane w całym przedziale mocy znamionowych – od ułamka wata do kilku megawatów. Ich powszechna obecność w otoczeniu człowieka sprawia, że wytwarzane przez nie drgania i towarzysząca im emisja dźwiękowa mogą być uciążliwe dla otoczenia, zwłaszcza przy znacznym czasie ekspozycji. Minimalizacja tych efektów pasożytniczych towarzyszących procesowi przemiany energetycznej jest zagadnieniem interdyscyplinarnym łączącym w sobie problemy jednocześnie powiązane z elektrotechniką, mechaniką i akustyką.

Zamiarem autora było połączenie cech monografii i podręcznika akademickiego przeznaczonego dla osób zainteresowanych analizą, projektowaniem oraz różnymi aspektami zastosowań maszyn elektrycznych. Dlatego też, dla wygody początkującego czytelnika, w każdym z rozdziałów zamieszczono na początku klasyczne informacje o podstawach matematycznych prezentowanego podejścia i fizyce zachodzących zjawisk. Ułatwi to, zdaniem autora, zrozumienie prezentowanych dalej specjalistycznych zagadnień. Redukcja drgań i hałasu w maszynach elektrycznych nie może być prowadzona w oderwaniu od podstawowej ich funkcji, jaką jest przetwarzanie energii. Dlatego też pokazano podstawowe zależności wiążące geometrię i własności materiałowe maszyn z ich danymi znamionowymi oraz podano niektóre cechy technologii ich produkcji.

W drugim rozdziale omówiono najważniejsze aspekty teorii pola elektromagnetycznego i pokazano w jaki sposób są one aplikowane w maszynach elektrycznych. Stosując całkowite parametry elektro-mechaniczne opisano zachodzące w maszynach przemiany energii. Rozdział trzeci jest poświęcony przedstawieniu najważniejszych typów konstrukcji maszyn z magnesami trwałymi, z uwzględnieniem specyfiki budowy wielofazowych uzwojeń. Obwodowy sposób opisu maszyn elektrycznych zawarto w rozdziale czwartym, gdzie zestawiono zależności określające elementy schematu zastępczego dla różnych ich topologii – o strumieniu radialnym, osiowym oraz tubowym. Włączono tu również podstawy obliczeń cieplnych, które są koniecznym elementem w trakcie projektowania czy analizy eksploatacyjnej wszelkich urządzeń elektrycznych.

Rozdział piąty wprowadza pojęcia lokalnych gęstości energii pola magnetycznego i jego strumienia pędu, które to są konieczne do polowego opisu

zamiany energii elektrycznej na mechaniczną. W tym celu wykorzystuje się tensorowy opis naprężeń magnetycznych i mechanicznych, za pomocą którego określono szczegółowo relacje wiążące pole naprężeń z polami sił powierzchniowych i objętościowych. W kolejnym, szóstym rozdziale przedstawiono skrótowo wielkości i równania różniczkowe cząstkowe determinujące zachowanie liniowo sprężystego kontinuum. Pokazano, jak wychodząc z zależności dla elementarnych brył, takich jak belka czy pierścień, można otrzymać analityczne rozwiązanie dla drgań wymuszonych i własnych stojana maszyny elektrycznej. Rozdział siódmy zamyka część funkcyjną monografii, w którym to omówiono rozwiązania skalarnie równania falowego zastosowanego do obliczeń pola akustycznego wywołanego źródłami punktowymi lub cylindrycznymi.

Analiza wyników obliczeń wibroakustycznych opiera się na przekształceniu Fouriera, którego powiązanie z teorią aproksymacji liniowej na zbiorach dyskretnych zamieszczono w rozdziale ósmym. Za pomocą prostych przykładów liczbowych wyjaśniono możliwości i ograniczenia jedno- i dwuwymiarowej dyskretnej transformaty Fouriera zastosowanej do obliczeń zespolonego widma amplitudowo-fazowego.

W rozdziale dziewiątym zawarto ideę obliczeń drgań mechanicznych układów o skończonej ilości stopni swobody. Szczególny nacisk położono na wyznaczanie amplitud drgań wymuszonych, tzw. składowych modalnych, to jest wynikających z postaci drgań własnych, zarówno stojana, jak i wirnika maszyny elektrycznej. Przedstawiono również zależności pomiędzy tymi składowymi i przestrzennymi harmonikami fourierowskimi. Monografię zamyka rozdział dziesiąty, gdzie pokazano w jaki sposób można połączyć rozwiązania numeryczne uzyskane metodą elementów skończonych w dziedzinie rzeczywistej (czas-przestrzeń) z wyznaczeniem składników rozwiązania w dziedzinie widmowej (częstotliwość-postać). Szczegółowo omówiono mechanizm przenoszenia danych pomiędzy kolejnymi obszarami analizy, to jest obliczeniami magnetycznymi, drgań mechanicznych i emisją dźwięku.

Zamieszczone wyniki obliczeń metodą elementów skończonych zostały wykonane za pomocą oprogramowania MagNet 7, Infolytica Corp. dla pól magnetycznych oraz ANSYS 12, ANSYS Inc. dla pól przemieszczeń i ciśnienia akustycznego.

Autor serdecznie dziękuje Recenzentom – profesorom Zbigniewowi Kołakowskiemu i Marianowi Łukaniszynowi, których wnikliwe recenzje przyczyniły się do poprawienia czytelności prezentowanych wywodów.

Szczególne podziękowania za wieloletnią współpracę są kierowane do doktora Zbigniewa Piecha, OTIS United Technologies. Prowadzone razem projekty badawcze były inspiracją do rozwiązania szeregu problemów omawianych w tej monografii.

1. WPROWADZENIE

Idea zastosowania magnesów trwałych w maszynach elektrycznych jest znana właściwie od początków ich konstruowania – pierwsze maszyny prądu stałego ze wzbudzeniem od magnesów trwałych pojawiły się w końcu XIX wieku. Ze względu na nienajlepsze charakterystyki materiałowe (stosunkowo niewielkie natężenie koercji magnetycznej, znaczna wrażliwość parametrów magnetycznych na zmiany temperatury) oraz przede wszystkim wysoka cena, zastosowanie materiałów twardych magnetycznie było ograniczone do maszyn o mocy rzędu części kW. W szczególności dotyczyło to zastosowań, w których ich zalety, takie jak wysoka niezawodność i sprawność czy mała stała czasowa przeważały nad niedostatkami wynikającymi ze znacznego ciężaru, stosunkowo łatwego odmagnesowania i niewielkich możliwości regulacji parametrów eksploatacyjnych. Przełom technologiczny nastąpił w latach 70. ubiegłego wieku wskutek pojawienia się tzw. magnesów ziem rzadkich ze stopów NdFeB (Neodym-Żelazo-Bor) oraz SmCo (Samarium-Kobalt) o wielokrotnie większej gęstości zmagazynowanej energii. Magnesy tego rodzaju praktycznie wyparły z rynku starsze technologie, a masowość produkcji podtrzymuje trend zmniejszania się ich ceny jednostkowej. Drugim czynnikiem mającym duży wpływ na powszechność zastosowań maszyn z magnesami trwałymi jest rozwój energoelektroniki. Obserwuje się wyraźną tendencję integrowania układów elektronicznych i maszyn elektrycznych w jedną całość, w której ciężar regulacji typowych parametrów eksploatacyjnych, jak prędkość obrotowa czy napięcie został praktycznie w całości przeniesiony do części elektronicznej układu napędowego. Pozwoliło to na usunięcie w dużej mierze najistotniejszego mankamentu maszyny z magnesami trwałymi, jakim był brak możliwości regulacji poziomu wzbudzenia pierwotnego pola magnetycznego i wynikających z niego wielkości pochodnych.

Maszyny indukcyjne są nadal najbardziej rozpowszechnionym rodzajem przetwornika elektromechanicznego, przede wszystkim z powodu relatywnie niskiej ceny. Tym niemniej, maszyny z magnesami trwałymi przewyższają je już ze względu na stosunek mocy elektromagnetycznej do masy oraz wyraźnie lepszą sprawność i współczynnik mocy. Należy przypuszczać, że będą one w najbliższej przyszłości dominować w obszarze systemów napędowych o wymaganej dużej precyzji regulacji oraz rozproszonych źródłach energii elektrycznej.

Modele teoretyczne maszyn elektrycznych można podzielić na dwie grupy: pierwsza z nich zawiera obliczenia wyizolowanej maszyny w zadanych warunkach obciążenia i zasilania. Wykonywane są one najczęściej metodami numerycznymi, wśród których dominuje metoda elementu skończonego. Można stwierdzić, że dla dowolnej maszyny daje się obecnie zbudować jej trójwymiarowy model i za jego pomocą obliczyć w akceptowalnym czasie, tj. co najwyżej kilku godzin, najistotniejsze parametry eksploatacyjne, w tym także wynikające z prostych stanów niestacjonarnych. Wykorzystanie modeli stricte numerycznych dla rozwiązywania niestacjonarnych w czasie przebiegów jest możliwe – służą do tego tzw. metody kroków czasowych. Ich zastosowanie ogranicza nieliniowość własności materiałowych, która istotnie zwielokrotnia czas obliczeń poprzez konieczność zmniejszenia kroku czasowego.

Komercyjne pakiety obliczeniowe oferują zaawansowane systemy przygotowywania modelu, coraz częściej umożliwiające wykorzystanie systemów CAD wykonujących elektroniczną dokumentację technologiczno-produkcyjną. Korzystając z tych nowoczesnych, wysoce zautomatyzowanych systemów, należy jednak pamiętać o „twierdzeniu” przypisywanym jednemu z ojców tej metody prof. Silvesterowi, tylko na poły żartobliwym, które mówi, że *...dla dowolnego urządzenia można zbudować poprawną numerycznie siatkę elementów skończonych, która po rozwiązaniu da wyniki nie mające nic wspólnego z rzeczywistością...* Dlatego też najważniejszym etapem tworzenia modelu numerycznego nie jest sam proces jego budowy, lecz etap wielowariantowej weryfikacji jego poprawności, będący silnie uzależniony od typu urządzenia, warunków jego pracy oraz postaci wyników końcowych.

Do drugiej grupy modeli teoretycznych należą techniki uproszczonej reprezentacji oddziaływania maszyny z otoczeniem, zarówno w dziedzinie elektrycznej, jak i mechanicznej. Wykorzystują one tzw. schemat zastępczy, wiążący zmienne stanu (wielkości, których iloczyn algebraiczny bądź skalarny daje w wyniku moc lub energię) za pomocą całkowych parametrów, takich jak rezystancja, indukcyjność, moment bezwładności, sprężystość etc. O zasadniczej różnicy pomiędzy tymi dwiema grupami świadczy opis ich strony matematycznej – metody numeryczne dotyczą rozwiązywania wielkich układów równań liniowych (od 10^4 dla modeli 2D do 10^6 dla obiektów 3D) pochodzących od dyskretyzacji przestrzennej równań różniczkowych cząstkowych. Natomiast metody uproszczone są związane z analizą od kilku do kilkudziesięciu równań różniczkowych zwyczajnych względem czasu.

Wiele prac zostało poświęconych połączeniu możliwości tych dwu metod, tworząc wydzieloną dziedzinę tzw. metod obwodowo-półowych [1.2][1.3][1.6]. Podstawy teoretyczne są już ustalone, barierą jest nakład obliczeń niezbędny do uzyskania rozwiązań w obiektach o wystarczającej złożoności dla zastosowań w praktyce. Dostępne komercyjne systemy oprogramowania (MagNet, Opera, ANSYS) oferują wbudowane mechanizmy

wiążące rozwiązania polowe 2D i 3D z obwodami zasilającymi zawierającymi źródła prądowe i napięciowe, skupione elementy biernie oraz modele kluczy elektronicznych.

Metody obwodowe i związane z nimi schematy zastępcze są także chętnie wykorzystywane poza obszarem elektrotechniki – w powszechnym użytku są pojęcia impedancji mechanicznej i akustycznej [1.4][1.5]. Elementy tych schematów są wyznaczane, w zależności od stopnia skomplikowania badanego obiektu, metodami analitycznymi bądź numerycznymi.

Obliczenia wibroakustyczne maszyn elektrycznych są, zdaniem autora, na tyle złożone, że stosowanie metod numerycznych jest niezbędne we wszystkich dziedzinach obliczeń. Nie oznacza to, że w każdym przypadku zachodzi konieczność posilkowania się wyłącznie tymi metodami – nie byłoby to prawdopodobnie możliwe. Prowadzenie takich analiz polega przede wszystkim na umiejętnym przetwarzaniu i łączeniu wyników obliczeń w poszczególnych obszarach badań, w tym również uzyskanymi metodą elementów skończonych. Przy takim podejściu wynika konieczność pracy w dziedzinie tzw. matematyki dyskretnej, operując niekiedy na bardzo dużych zbiorach liczb. W zależności od postaci oczekiwanych wyników są stosowane różne techniki obliczeniowe, których wspólnym mianownikiem są pojęcia z obszaru analizy funkcjonalnej w przestrzeniach liniowych. W pracy zrezygnowano z omawiania szczegółów matematycznych współczesnych metod numerycznych, choćby ze względu na obszerność materiału wynikającą z interdyscyplinarnego charakteru omawianego zagadnienia. Należy jednak pamiętać, że do konstruowania optymalnych modeli numerycznych, to jest dokładnych i szybko działających, będzie potrzebna wiedza zawarta w specjalistycznych opracowaniach, których przykładem jest obszerna książka [1.9].

Różnorodność konstruowanych maszyn elektrycznych jest tak duża, że nie jest możliwe omówienie wszystkich ich wariantów. Zasadniczym celem wykładu było przedstawienie pewnej, dość uniwersalnej metody postępowania pozwalającej na analizę maszyn o różnych topologiach ich budowy. Prezentowane podejście ma także szereg ograniczeń i mankamentów, z których najistotniejszym jest pominięcie problematyki diagnostyki wibroakustycznej. Zainteresowanych tą tematyką odsyła się do specjalistycznych opracowań [1.1][1.7][1.8]. Być może w przyszłości niedostatki te zostaną usunięte.

Literatura

- [1.1] Cempel C.: *Podstawy wibroakustycznej diagnostyki maszyn*, WNT, Warszawa 1997.
- [1.2] Demenko A.: *Obwodowe modele układów z polem elektromagnetycznym*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2004.

- [1.3] Dems M., Komęza K.: *Modelowanie statycznych i dynamicznych stanów pracy silników indukcyjnych*, Monografie Politechniki Łódzkiej, 2011.
- [1.4] Dobrucki A.: *Przetworniki elektroakustyczne*, WNT, Warszawa 2007.
- [1.5] Fahy F., Gardonio P.: *Sound and Structural Vibration, Radiation, Transmission and Response*, Elsevier 2007.
- [1.6] Nowak L.: *Modele polowe przetworników elektromechanicznych w stanach nieustalonych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1999.
- [1.7] Swędrowski L.: *Nowa metoda diagnostyki łożysk silnika indukcyjnego oparta na pomiarze i analizie widmowej prądu zasilającego*, Politechnika Gdańska, Gdańsk 2005.
- [1.8] Williams E.G.: *Fourier Acoustics, Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*, Academic Press, 1999.
- [1.9] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.: *Finite element method: its basis and fundamentals*, Elsevier, 2005.

2. PODSTAWY ELEKTROMECHANICZNEGO PRZETWARZANIA ENERGII

2.1. Równania pola elektromagnetycznego

Pionierskie doświadczenia Ampère'a i Faradaya, wykazujące możliwość przekazywania energii i pędu bez pośrednictwa materialnego, spowodowały konieczność opracowania teorii tzw. pola elektromagnetycznego. Ustalono na drodze doświadczalnej, że na ładunek elektryczny q poruszający się z prędkością \mathbf{v} działa siła \mathbf{F} równa

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

Wektory występujące w tym równaniu są obecnie nazywane natężeniem pola elektrycznego \mathbf{E} oraz indukcji magnetycznej \mathbf{B} . Ich wzajemne powiązanie zawdzięczamy J.C. Maxwellowi, który jako pierwszy podał równania współcześnie zapisywane w postaci następującego zbioru zależności

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \end{aligned} \quad (2.2)$$

Wektor \mathbf{J} oznacza gęstość prądu przewodzenia, wektor \mathbf{D} indukcję elektryczną, a objętościową gęstość ładunku elektrycznego oznaczono jako ρ . Własności materialne środowiska, w którym występuje pole elektromagnetyczne, są wprowadzane poprzez następujące zależności

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (2.3.a)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} \quad (2.3.b)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (2.3.c)$$

Wielkości ε_r i μ_r są bezwymiarowymi względnymi przenikalnościami, odpowiednio, dielektryczną i magnetyczną, natomiast γ jest konduktywnością elektryczną

wyrażoną w S/m. Stałe ε_0 oraz μ_0 są przenikalnościami próżni i wynoszą: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m oraz $\varepsilon_0 \cong 8.84 \cdot 10^{-12}$ Vm/C. Ich iloczyn definicyjnie jest równy odwrotności kwadratu prędkości światła

$$\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2} \quad (2.4)$$

Wprowadzenie wielkości lokalnych, dotyczących wybranego punktu w przestrzeni wymaga zdefiniowania układu współrzędnych. W rozważaniach będzie stosowany wyłącznie prawoskrętny układ kartezjański oznaczany dla układu globalnego jako

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad (2.5)$$

W wielu wypadkach wygodniej jest operować układem lokalnym, na przykład w celu określenia dodatniej strony zamkniętej powierzchni S. Wprowadza się oznaczenie

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_1 \quad (2.6)$$

gdzie \mathbf{n} – lokalny kierunek normalny zewnątrz do zamkniętej powierzchni S(V), $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ – kierunki styczne do S(V). Przy przetwarzaniu wyników obliczeń rozkładów czasoprzestrzennych pola magnetycznego w maszynach elektrycznych wykorzystuje się często cylindryczny układ współrzędnych $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{z})$. Służy on jednak przede wszystkim do prezentacji wybranych wielkości, na przykład wirujących fal indukcji czy sił magnetycznych, same zaś obliczenia są prowadzone w układzie prostokątnym. Stosowanie w analizie kartezjańskiego układu współrzędnych pozwala na skrócenie zapisu poprzez wprowadzenie operatora nabra ∇ określonego definicyjnie jako

$$\nabla \equiv \mathbf{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.7)$$

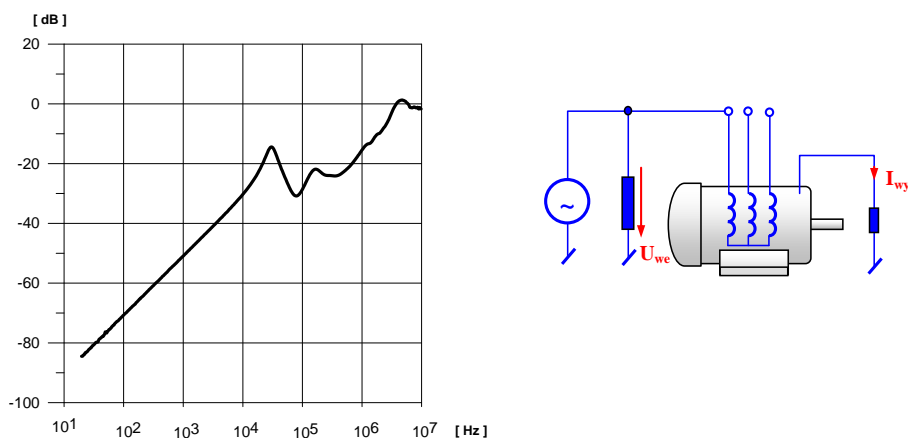
Za jego pomocą operatory wektorowe gradientu, divergencji i rotacji można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \phi &\equiv \nabla \phi \\ \mathit{div} \mathbf{B} &\equiv \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{rot} \mathbf{B} &\equiv \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.8)$$

W równaniach (2.8) ϕ oznacza dowolną skalarną, a \mathbf{B} wektorową funkcję w przestrzeni.

Sprzężenie pomiędzy polami elektrycznym i magnetycznym może być usunięte, jeżeli w pierwszym równaniu (2.2) zostanie zaniedbany wpływ zmian w czasie indukcji dielektrycznej. Jest to całkowicie poprawne, gdy są rozważane przebiegi prądów i napięć niezmiennie w czasie, natomiast dla urządzeń zasilanych z sieci prądu przemiennego oznacza to zawsze pewne uproszczenie.

O stopniu tego uproszczenia decyduje struktura geometryczna i materiałowa rozpatrywanego obiektu i przede wszystkim prędkość zmian pola. W przypadku zasilania napięciem bądź prądem okresowym mówi się o częstotliwości zasilania. Przykładowe widmo odpowiedzi częstotliwościowej maszyny małej mocy na sinusoidalne wymuszenie napięciowe pomiędzy uzwojeniem fazowym a uziemionym rdzeniem przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Amplitudowe widmo częstotliwościowe prądu przesunięcia dielektrycznego pomiędzy uzwojeniem fazowym i uziemionym rdzeniem stojana silnika o mocy 4.5 kW z magnesami trwałymi na wirniku

Jak wynika z pokazanych na nim wyników zaniedbanie prądów pojemnościowych o częstotliwościach sieciowych ($f < 100$ Hz) jest całkowicie uzasadnione, natomiast w zakresie częstotliwości bliskich górnej granicy pasma akustycznego ($f \cong 16$ kHz) wpływ tych prądów może być już zauważalny. Biorąc jednak pod uwagę, że we współczesnych zasilaczach przekształtnikowych amplitudy składowych wysokoczęstotliwościowych są najczęściej rzędu 1-2% harmonicznej podstawowej, można uznać, że ich pominięcie nie wpływa istotnie na wartość średnią momentu. Z tego punktu widzenia przyjęty w dalszym ciągu pracy rozdział zjawisk elektrycznych i magnetycznych jest do zaakceptowania. Jednak w obliczeniach dotyczących np. zjawisk wibroakustycznych, gdzie krzywa wrażliwości ludzkiego ucha uwypatnia źródła o wysokich częstotliwościach, tego rodzaju wstępne założenie powinno być starannie weryfikowane. Liczba prac poświęconych jednoczesnym obliczeniom sprzężonych pól elektrycznych i magnetycznych w maszynach elektrycznych jest jeszcze nieznaczna – problem obliczeń falowych we wszelkiego rodzaju urządzeniach elektrycznych jest wciąż zagadnieniem otwartym.

Równania Maxwella w postaci różniczkowej stanowią zwarty opis oddziaływań elektromagnetycznych. Ich przydatność w praktyce obliczeniowej jest jednakże niewielka – tylko w niewielu obiektach o bardzo prostej geometrii można otrzymać rozwiązania w postaci analitycznej. Numeryczne metody analizy, takie jak elementu czy różnic skończonych, opierają się na całkowym sformułowaniu tych równań. Uzyskuje się je wprowadzając obustronne całkowanie równań (2.2) po żądanej objętości lub powierzchni bez jakichkolwiek ograniczeń co do ich kształtu. I tak całkując pierwsze równanie Maxwella (w uproszczonej postaci) nad otwartą powierzchnią S o konturze brzegowej l otrzymuje się

$$\iint_{S(l)} \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S(l)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.9)$$

Całka po lewej stronie (2.9) może być przekształcona za pomocą twierdzenia Stokes'a do postaci nazywanej prawem Ampère'a

$$\oint_{l(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S(l)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.10)$$

Z kolei warunek bezźródłowości pola indukcji magnetycznej po rozciągnięciu go na całą objętość V o powierzchni brzegowej S zapisuje się jako

$$\iiint_{V(S)} \text{div } \mathbf{B} \, dV = 0 \quad (2.11)$$

Po zastosowaniu twierdzenia Gaussa mamy

$$\oiint_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.12)$$

Identyczną postać otrzymuje się oczywiście również dla pola gęstości prądu \mathbf{J}

$$\oiint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.13)$$

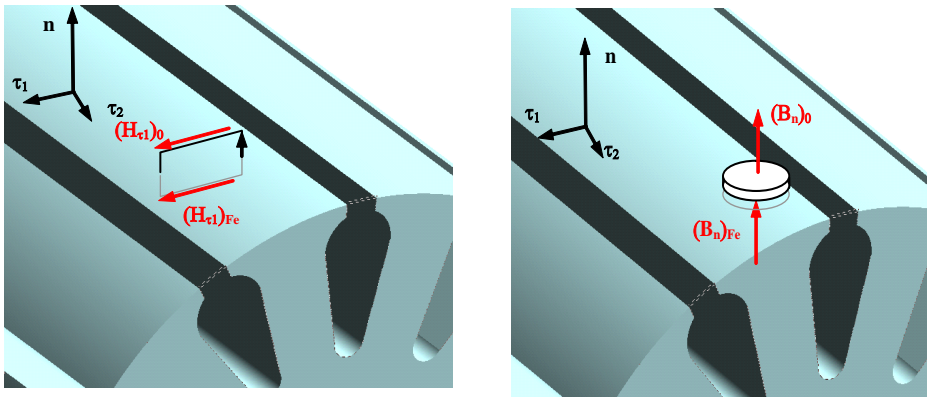
Równości (2.10) oraz (2.12) pozwalają na określenie ważnych warunków ciągłości pola na granicy dowolnych środowisk. Poprowadźmy zamknięty, prostokątny kontur o rozmiarach $(\delta n, \delta \tau_1)$ przenikający granicę ferromagnetyk – powietrze jak pokazano to na rys. 2.2a. Załóżmy również, że jego wymiar w kierunku

normalnym do granicy δn jest dowolnie mały. Prawo Ampère'a dla tego konturu przyjmie postać

$$\oint_{l(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cong \int_0^{\delta\tau_1} (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_{Fe}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.14)$$

gdzie indeks (0) oznacza powietrze a (Fe) ferromagnetyk. Zmniejszając rozmiar całego konturu, uzyskuje się w granicy równość składowych natężenia pola magnetycznego stycznych do powierzchni granicznej środowisk

$$(H_{\tau 1})_0 = (H_{\tau 1})_{Fe} \quad (2.15)$$



a. b.
Rys. 2.2. Wyznaczenie ciągłości składowych stycznych natężenia pola magnetycznego (a) oraz składowych normalnych indukcji magnetycznej (b)

Obecnie zbudujmy walec o powierzchniach δS równoległych do powierzchni granicznej środowisk i wysokości δn częściowo zanurzony w ferromagnetyku (rys. 2.2b). Przyjmując jak poprzednio, że wymiar próbnego obszaru w kierunku normalnym jest wielokrotnie mniejszy od wymiarów w kierunku stycznym, uzyskujemy możliwość uproszczenia zależności (2.12)

$$\oiint_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \cong \iint_{\delta S} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\delta S} \mathbf{B}_{Fe} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.16)$$

Pamiętając, że poszczególne kierunki $d\mathbf{S}$ są skierowane na zewnątrz testowej objętości – pominięcie bocznej powierzchni walca przy całkowaniu nie wpływa na orientację pozostałych powierzchni – otrzymujemy warunek ciągłości składowych normalnych pola indukcji magnetycznej

$$(B_n)_0 = (B_n)_{Fe} \quad (2.17)$$

Do rozpatrzenia pozostało drugie równanie Maxwella, które tak jak uprzednio całkujemy po wybranej otwartej powierzchni $S(l)$

$$\iint_{S(l)} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S(l)} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.18)$$

Stosując do lewej strony twierdzenie Stokes'a oraz zakładając, że kontur brzegowy $l(S)$ nie zmienia się w czasie – pozwala to na wymiennność kolejności działania operatorów całkowania i różniczkowania po prawej stronie równania – otrzymujemy

$$\oint_{l(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_{S(l)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.19)$$

Zależność (2.19) nosi nazwę prawa Faradaya. Powierzchnia całkowania $S(l)$ jest dowolna, lecz istota tego równania dotyczy przypadku, kiedy kontur brzegowy powierzchni pokrywa się z ciągłym, przewodzącym elektrycznie medium. Jedynym warunkiem stosowalności równania (2.19) jest zachowanie ciągłości materialnej konturu w czasie.

2.2. Indukowana siła elektromotoryczna

Szczególnym przypadkiem wykorzystania prawa Faradaya jest obliczenie bilansu napięć w pojedynczym zwoju, którego końce (a) (b) znajdują się poza obszarem występowania pola magnetycznego. Całkę po konturze zamkniętym w (2.19) możemy rozbić na dwie części – wzdłuż przewodzącego elektrycznie przewodu o konduktywności γ i domykającego odcinka obwodu pomiędzy jego końcami bez wyraźnie określonej drogi przewodzenia prądu. Ponieważ końce zwoju znajdują się w obszarze o pomijalnym natężeniu pola magnetycznego, zachodzi tam

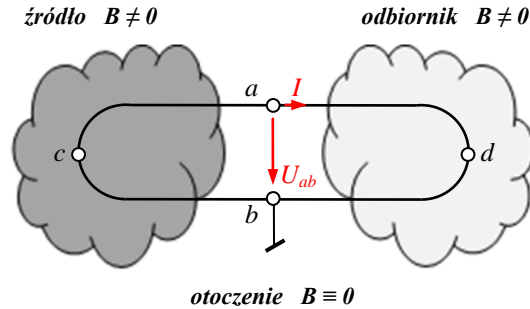
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.20)$$

co pozwala¹ na ustalenie

$$\mathbf{E} = -\nabla\varpi \quad (2.21)$$

¹ Operacja $\nabla \times \nabla \varpi$ jest tożsamościowo równa zeru, w załączniku A zestawiono wzory dla najczęściej wykorzystywanych działań na operatorach wektorowych.

gdzie ϖ jest pewną jednowartościową funkcją skalarną nazywaną potencjałem elektrycznym. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy, że $\varpi_b = 0$ oraz $\varpi_a > 0$. Zgodnie z powszechnie przyjętą konwencją zakładamy również, że w odbiornikach energii prąd elektryczny płynie w kierunku spadku potencjału, a w źródłach odwrotnie.



Rys. 2.3. Elementarna sieć elektryczna

Jeżeli rozważania są prowadzone dla odbiornika, to równanie (2.19) może być zapisane w następującej postaci

$$\oint_{l_{\text{odbiornika}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_{adb}} \frac{1}{\gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a -\nabla\varpi \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(l)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.22)$$

Lokalny układ współrzędnych można zawsze ustawić tak, że dodatni kierunek całkowania wynikający z reguły iloczynu wektorowego pokrywa się z przyjętym uprzednio dodatnim zwrotem prądu. Zastępując gęstość prądu jego natężeniem pomnożonym przez powierzchnię przekroju przewodnika (po scałkowaniu iloraz parametrów geometrycznych da związek określający rezystancję R) oraz całkę powierzchniową z indukcji przenikającej elementarny zwoj przez strumień magnetyczny Ψ z nim skojarzony, otrzymujemy II prawo Kirchhoffa określone w odbiornikowym systemie oznaczeń jako

$$\varpi_a - \varpi_b = u_{ab} = Ri + \frac{d\Psi}{dt} \quad (2.23)$$

Przyjęto konwencję, że grot strzałki symbolizującej napięcie wskazuje spadek potencjału w obwodzie – rys. 2.3. Prowadząc identyczne rozważania dla drugiej części obwodu zawierającej źródło otrzymujemy

$$\oint_{l_{\text{źródła}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_{bca}} \frac{1}{\gamma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^b -\nabla\varpi \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(l)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.24)$$

Jeśli definicja napięcia na zaciskach u_{ab} nie ulega zmianie, to II prawo Kirchhoffa określone w źródłowym systemie oznaczeń wynosi

$$u_{ab} = -Ri - \frac{d\Psi}{dt} \quad (2.25)$$

Obydwa systemy oznaczeń są równoprawne, zasadnicza różnica pomiędzy nimi wynika z pojęcia mocy elektrycznej będącej iloczynem chwilowych wartości prądu i napięcia. Dodatnia wartość mocy w systemie odbiornikowym oznacza moc pobieraną przez urządzenie, natomiast w opisie źródłowym moc oddawaną. W dalszym ciągu książki będzie stosowany system odbiornikowy. Należy podkreślić, że znaki składników w równaniach (2.23) (2.25) wynikają z arbitralnie przyjętej konwencji co do znaku prądu oraz napięcia. Przykładowo, całkowicie dopuszczalna zmiana znaku w równaniu (2.21) powoduje odwrócenie znaku napięcia w zależnościach określających napięcie u_{ab} . Zauważmy również, że w punktach (c) (d) znajdujących się wewnątrz źródła i odbiornika nie może być określony ich potencjał ϖ . Wynika to z przyjętego uproszczenia o rozdzieleniu pól elektrycznego i magnetycznego, eliminującego prąd przesunięcia dielektrycznego w analizowanej strukturze. Szczegółowego omówienia wymaga wprowadzone wcześniej pojęcie strumienia skojarzonego Ψ z wybraną częścią lub całością uzwojenia. Definitywnie wielkość ta, dla uzwojenia składającego się z K zwojów w połączonych szeregowo M cewkach, jest określona w każdej chwili czasowej prostą zależnością

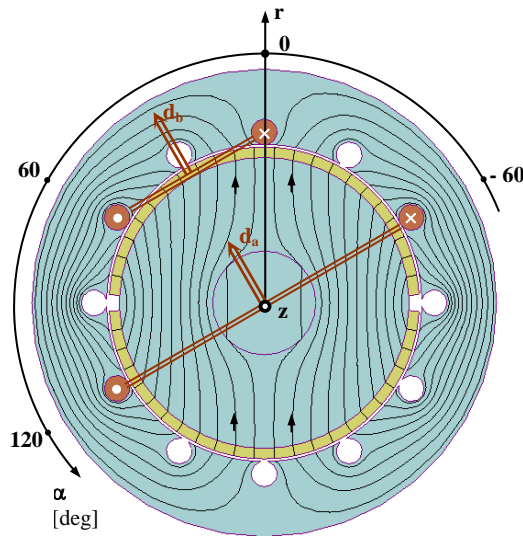
$$\Psi = \sum_{k=1}^K \iint_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.26)$$

przy czym należy pamiętać, że całkowanie odbywa się w układzie współrzędnych nieruchomym względem uzwojenia. Dla uzwojeń cewkowych rozmieszczonych w żłobkach ferromagnetycznego rdzenia można wstępnie założyć, że wszystkie zwoje danej cewki są skojarzone z takim samym strumieniem. Jak zostanie to pokazane w następnych rozdziałach, popełniany tu błąd jest rzędu co najwyżej kilku procentów i jest on silnie uzależniony od geometrii danej maszyny. Przyjmując dalej, że wszystkie cewki tworzące uzwojenie mają taką samą zwojność N , wzór (2.26) przekształca się do

$$\Psi = \sum_{m=1}^M N \iint_{S_m} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.27)$$

gdzie M jest liczbą cewek połączonych szeregowo w uzwojeniu lub jego części nazywanej pasmem. Każde pasmo uzwojenia jest skojarzone z identycznym strumieniem, dlatego mogą one być łączone szeregowo bądź równoległe. Szczegółową analizę struktur uzwojeń zamieszczono w rozdziale 3.

Rozpatrzmy obecnie elementarną² maszynę elektryczną – rys. 2.4, w której pole magnetyczne jest wzbudzone od strony wirnika za pomocą magnesów trwałych. Kierunki namagnesowania są takie, że zwrot wektora indukcji magnetycznej w obszarze wirnika jest skierowany pionowo do góry w prawie całej jego objętości. Pole o praktycznie identycznym kształcie mogłoby być również wytworzone za pomocą cewek umieszczonych na wirniku i wiodących prąd stały. Analiza rozkładów pola magnetycznego w maszynie będzie prowadzona w cylindrycznym układzie współrzędnych o następnym $(\mathbf{r}, \alpha, \mathbf{z})$. W żłobkach stojana umieszczono dwie cewki ($a1, a2$) oraz ($b1, b2$), których osie magnetyczne oznaczono wektorami, odpowiednio \mathbf{d}_a i \mathbf{d}_b . Współrzędne kątowe zacisków cewek wynoszą: $\alpha(a1) = -60$ deg, $\alpha(a2) = 120$ deg, $\alpha(b1) = 0$ deg, $\alpha(b2) = 60$ deg.



Rys. 2.4. Elementarna maszyna elektryczna ze wzbudzeniem pola magnetycznego przez magnesy trwale umieszczone na powierzchni wirnika

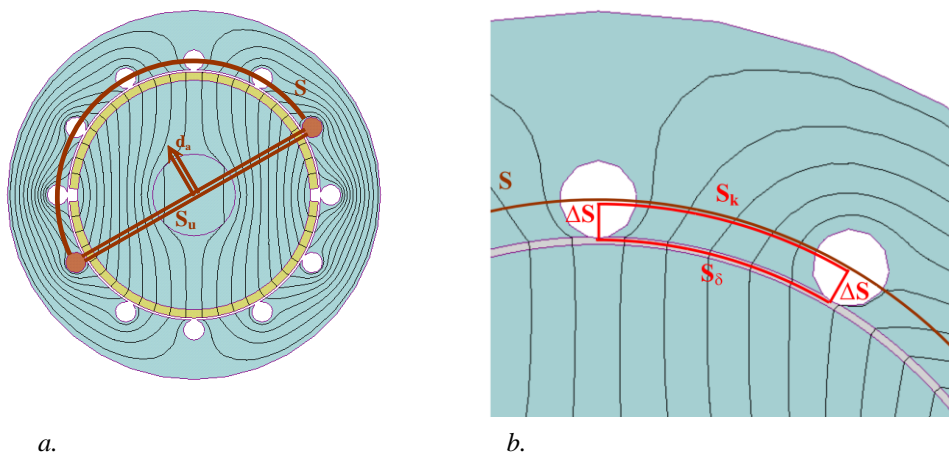
² Przez pojęcie „elementarnej maszyny elektrycznej” będziemy w dalszym ciągu rozumieć uproszczony model trójfazowej maszyny elektrycznej, w której procesy przetwarzania energii dotyczą wyłącznie jednowymiarowego pola w szczeliny mechanicznej. Dla wyróżnienia graficznego będzie ona przedstawiana z okrągłymi żłobkami w stojanie – niestosowanymi w jakimkolwiek typie maszyny.

Dodatni kierunek całkowania natężenia pola elektrycznego w wybranej cewce oznaczono znakami (\times – do płaszczyzny rysunku) oraz (\bullet – od płaszczyzny rysunku), co wynika z reguł prawoskrętnego układu współrzędnych oraz przyjęcia odbiornikowej konwencji oznaczeń. Jak wspomniano wcześniej, w odbiorniku wektory \mathbf{E} i \mathbf{J} są zgodne, więc jeśli w cewce płynie prąd, to wytwarza pole magnetyczne, którego wektor w płaszczyźnie cewki pokrywa się z jej osią magnetyczną.

Przyjmijmy obecnie, że zaciski rozpatrywanych cewek nie są połączone – rozpatrujemy stan jałowy maszyny. Strumienie skojarzone z poszczególnymi cewkami oblicza się na podstawie zależności (2.27), w której występuje zastępcza, otwarta powierzchnia cewki S . Jest ona usytuowana wewnątrz obwodu magnetycznego i zwykle jest niejednorodna materiałowo. Należy zwrócić uwagę, że kształt tej powierzchni jest dowolny – ze względu na własność bezźródłowości pola magnetycznego (2.12) możemy napisać (rys. 2.5.a)

$$\iint_{S_u} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.28)$$

W szczególności dla dowolnego wycinka pola można zbudować powierzchnię zamkniętą S_k (rys. 2.5.b) składającą się z k -tej części powierzchni S pomiędzy sąsiednimi żłobkami, równoległej do niej powierzchni S_δ poprowadzonej w szczelinie oraz dwu powierzchni ΔS leżących w płaszczyźnie symetrii żłobków. Domykające powierzchnie czołowe (w płaszczyznach równoległych do powierzchni rysunku) są pomijane ze względu na zakładany obecnie brak składowej pola indukcji magnetycznej w kierunku $0z$.



Rys. 2.5. Ustalenie powierzchni całkowania do obliczeń strumienia skojarzonego

Z własności bezźródłowości pola indukcji magnetycznej mamy

$$\iint_{S_k} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\delta} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + 2 \iint_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.29)$$

W stanie jałowym maszyny, kiedy prądy w cewkach stojana są pomijalnie małe przy pracy silnikowej bądź równe zero dla prądnicy, strumienie przenikające powierzchnie ΔS są również pomijalne. Stąd strumienie skojarzone z cewkami $(a1, a2)$ $(b1, b2)$ mogą być obliczane jako

$$\Psi_a(t) = N \int_0^L \int_{\alpha(a1)}^{\alpha(a2)} B_r(\alpha, t) r_\delta d\alpha dl = N L_i r_\delta \int_{\alpha(a1)}^{\alpha(a2)} B_r(\alpha, t) d\alpha \quad (2.30)$$

$$\Psi_b(t) = N \int_0^L \int_{\alpha(b1)}^{\alpha(b2)} B_r(\alpha, t) r_\delta d\alpha dl = N L_i r_\delta \int_{\alpha(b1)}^{\alpha(b2)} B_r(\alpha, t) d\alpha \quad (2.31)$$

gdzie L_i jest tzw. idealną długością (z pominięciem izolacji międzyblachowej) ferromagnetycznego pakietu rdzenia maszyny w kierunku Oz , a r_δ oznacza średni promień wodzący szczeliny powietrznej. Aby mogła się zaindukować siła elektromotoryczna $e(t)$ w rozważanych cewkach, strumienie z nimi skojarzone muszą być zmienne w czasie. Uzyskuje się to, jeżeli mamy do czynienia ze zmiennością czasową prądu wzbudzającego pole bądź ruchem względem pola wirnika o stałym namagnesowaniu

$$u(t) = -e(t) = \frac{d\Psi}{dt} + \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \quad (2.32)$$

Pierwszy składnik nazywany jest siłą elektromotoryczną (SEM) transformacji, a drugi rotacji, w którym Ω oznacza częstość kątową wirowania cewki względem pola indukcji. W maszynach z magnesami trwałymi SEM transformacji odgrywa drugorzędną rolę, występując jedynie w stanie obciążenia. Natomiast SEM rotacji, wynikająca z ruchu magnesów względem uzwojenia twornika, ma decydujące znaczenie w procesie przetwarzania energii. Załóżmy obecnie, że istnieje układ współrzędnych $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{z})$, względem którego pole magnetyczne jest nieruchome, to znaczy jest zmienne w przestrzeni i niezmiennie w czasie. Współrzędne α, β są powiązane zależnością

$$\alpha = \beta + \Omega t \quad (2.33)$$

Dla dodatniej prędkości wirnika cewki względem pola poruszają się z prędkością o przeciwnym znaku. Napięcie indukowane rotacji, na przykład w cewce $(a1, a2)$, wyniesie więc

$$u_a(t) = -\Omega N L r_\delta \int_{\alpha(a1)}^{\alpha(a2)} \frac{\partial B_r}{\partial \alpha} d\alpha \quad (2.34)$$

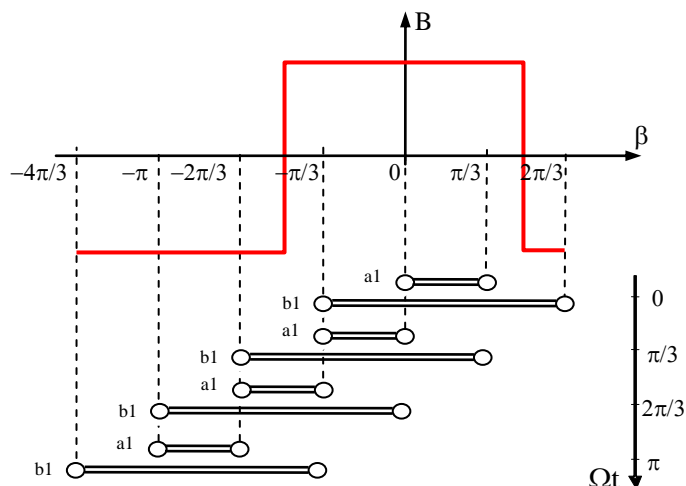
Przechodząc do układu współrzędnych (0β) , mamy

$$\begin{aligned} u_a(t) &= \Omega N L r_\delta \int_{\alpha(a2-\Omega t)}^{\alpha(a1-\Omega t)} \frac{\partial B_r}{\partial \beta} d\beta \\ &= \Omega N L_i r_\delta [B_r(a1 - \Omega t) - B_r(a2 - \Omega t)] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Zastępując częstość kątową Ω [rad/s] poprzez prędkość obrotową n [obr/s], otrzymuje się uniwersalną stałą k_E określoną przez parametry geometryczne oraz zwojność N cewki

$$k_E = \Omega N L_i r_\delta = n N S_\delta \quad (2.36)$$

przy czym $S_\delta = 2\pi r_\delta L_i$ jest całkowitą powierzchnią szczeliny, przez którą przechodzi strumień magnetyczny. Rozkład indukcji w szczelinie, przy pominięciu nieznaczących zaburzeń związanych ze skończoną szerokością otworów żłobkowych oraz ewentualnego wpływu nasycenia, ma prawie prostokątny przebieg w przestrzeni. Dla ustalenia uwagi przyjęto, że w chwili czasowej $t = 0$ pokrywają się początki układów współrzędnych (0α) oraz (0β) , a położenie wirnika względem stojana jest takie jak pokazano na rys. 2.4. Na rys. 2.6 przedstawiono wzajemne położenie cewek stojana względem pola wirnika dla kolejnych chwil czasowych.

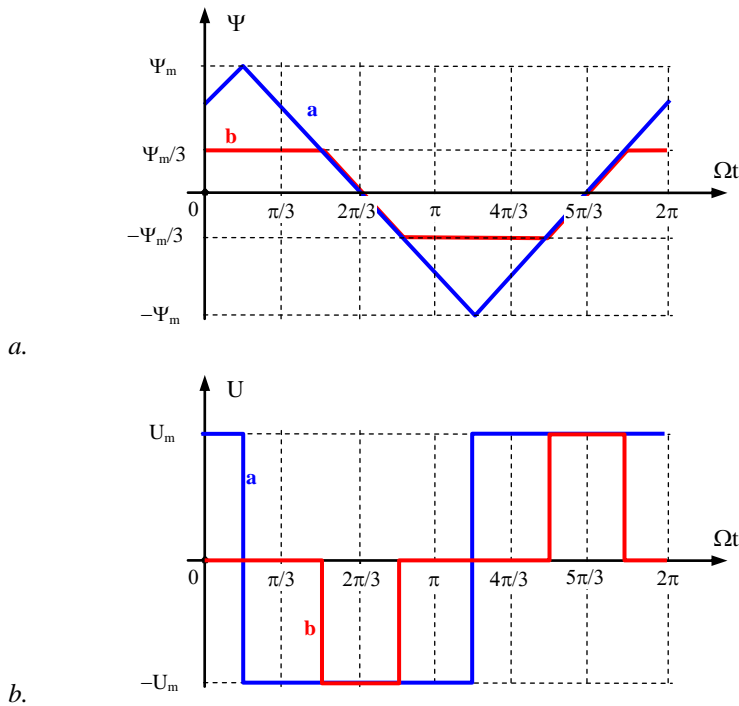


Rys. 2.6. Usytuowanie cewek stojana w układzie współrzędnych wirnika (0β) w wybranych chwilach czasowych

Na podstawie rys. 2.6 można wyznaczyć przebieg czasowy strumieni skojarzonych z obydwoma cewkami oraz napięcie indukowane na ich zaciskach. Uzyskane przebiegi czasowe napięć w analizowanych cewkach – rys. 2.7.b, istotnie się różnią. Ilościowo można to zilustrować za pomocą współczynnika kształtu σ_k określonego ilorazem wartości skutecznej do średniej przebiegu o okresie t_1

$$\sigma_k = \frac{\sqrt{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u^2(t) dt}}{\frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u(t) dt} \quad (2.37)$$

Obliczone wartości tego współczynnika wynoszą: $\sigma_{ka} = 1$, $\sigma_{kb} = \sqrt{3}$. Dla porównania współczynnik kształtu dla sinusoidy jest równy $\sigma_{k \sin} = 1.11$.



Rys. 2.7. Przebiegi czasowe strumieni skojarzonych Ψ (a) oraz indukowanych nimi napięć U (b) w cewkach elementarnej maszyny

Cewka (a) o rozpiętości kątowej równej π , identycznej jak rozpiętość bieguna pola magnetycznego, jest nazywana średnicową – por. rys. 2.5a.