Spis treści

Przedmowa

Niniejszy podręcznik zawiera podstawowe i klasyczne wiadomości z teorii obwodów. Jest on przeznaczony dla studentów, którzy opanowali kurs przedmiotów podstawowych I semestru: matematyki, fizyki oraz wstępu do elektrotechniki. Przyjęto w związku z tym, że czytelnik zna teorię liczb zespolonych, rachunek różniczkowy i całkowy oraz jest zapoznany z elementarnymi pojęciami obwodów elektrycznych i magnetycznych. Mimo to w wielu miejscach, a w szczególności w rozdziale 1, dokonano powtórzeń z tego zakresu. Dzięki temu podręcznik może być używany przez studentów o stosunkowo małej wiedzy z zakresu obwodów elektrycznych. Należy jednak podkreślić, że niektóre rozdziały zawierają bardziej zaawansowany materiał, wykładany na III i IV semestrze.

Podręcznik służy jednemu z najważniejszych przedmiotów podstawowych na kierunkach elektrotechnika i elektronika, obejmuje szeroki krąg zagadnień i zawiera dość duży ładunek wiedzy teoretycznej. Przeważająca część przedstawionego materiału ma charakter klasyczny, ale jednocześnie szczegółowo i wszechstronnie starano się naświetlić fundamentalne koncepcje nowoczesnej teorii obwodów.

Wszystkie ważniejsze twierdzenia teorii obwodów podano wraz z dowodami, co pozwala lepiej i głębiej zrozumieć zagadnienia, których one dotyczą oraz zapoznać się z pewnymi schematami myślowymi stosowanymi w tej dziedzinie. Tam, gdzie to było możliwe, starano się zachować ogólność rozważań, obejmując nimi zarówno klasę obwodów liniowych jak i nieliniowych, pasywnych i aktywnych, stacjonarnych i niestacjonarnych. Podręcznik jest ilustrowany licznymi przykładami, zarówno prostymi jak i bardziej skomplikowanymi, stosownie do omawianych zagadnień.

Autor wyraża serdeczne podziękowania obu Recenzentom niniejszego podręcznika prof. dr hab. Kazimierzowi Mikołajukowi i prof. dr hab. Stanisławowi Osowskiemu za uwagi i sugestie, które przyczyniły się do udoskonalenia tekstu.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

B	-	susceptancja
b	-	liczba gałęzi grafu
C	-	pojemność kondensatora
e	-	wartość chwilowa napięcia źródłowego
f	-	częstotliwość
G	-	konduktancja
I	-	wartość symboliczna prądu
I_m	-	amplituda prądu sinusoidalnego
$I(s)$	-	transformata prądu
$\|I\|$	-	wartość skuteczna prądu sinusoidalnego
i	-	wartość chwilowa prądu
i_s	-	prąd swobodny
i_w	-	prąd wymuszony
j	-	jedność urojona
j	-	wartość chwilowa prądu
L	-	indukcyjność cewki, dopełnienie drzewa
M	-	indukcyjność wzajemna
NPK	-	napięciowe prawo Kirchhoffa
P	-	moc czynna
P_h	-	straty histerezowe
P_w	-	straty wiroprądowe
PPK	-	prądowe prawo Kirchhoffa
p	-	moc chwilowa, przekładnia transformatora
Q	-	moc bierna
q	-	ładunek kondensatora
R	-	rezystancja
R_d	-	rezystancja dynamiczna
R_{st}	-	rezystancja statyczna
S	-	moc symboliczna

$|S|$ - moc pozorna
s - pulsacja zespolona, współczynnik szczytu
T - drzewo grafu, okres, moc zniekształcenia
t - czas
U - wartość symboliczna napięcia
U_m - amplituda napięcia sinusoidalnego
$U(s)$ - transformata napięcia
$|U|$ - wartość skuteczna napięcia sinusoidalnego
u - wartość chwilowa napięcia
u_s - napięcie swobodne
u_w - napięcie wymuszone
v - wartość chwilowa napięcia węzłowego
V - wartość symboliczna napięcia węzłowego
WO - wzmacniacz operacyjny
$w(t)$ - energia
X - reaktancja
x - rozstrojenie bezwzględne
x_a - odcięta bezwzględnej zbieżności
x_z - odcięta zbieżności
Y - admitancja
$|Y|$ - moduł admitancji
Z - impedancja
$|Z|$ - moduł impedancji
δ - rozstrojenie względne
ρ - opór charakterystyczny
σ - część rzeczywista pulsacji zespolonej
τ - czas, stała czasowa
ϕ - strumień magnetyczny
φ - kąt przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem i prądem
φ_i - faza początkowa prądu
φ_u - faza początkowa napięcia
ψ - strumień magnetyczny skojarzony
ω - pulsacja, część urojona pulsacji zespolonej
ω_r - pulsacja rezonansowa
$\mathcal{L}$ - transformacja Laplace'a
$\mathcal{L}^{-1}$ - odwrotna transformacja Laplace'a
$1(t)$ - funkcja jednostkowa

1. Elementarne wiadomości o obwodach elektrycznych

1.1. Wprowadzenie

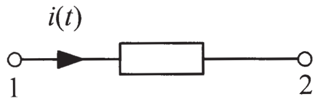
Teoria obwodów jest podstawowym działem elektrotechniki i elektroniki i zajmuje się badaniem elementów elektrycznych oraz ich połączeń. Elementy obwodów mają wyprowadzone na zewnątrz dwie lub więcej końcówek, za pomocą których tworzy się ich połączenia. Używa się do tego celu przewodów, o których na ogół zakładamy, że są idealnie przewodzące. Przykładami elementów obwodów są opornik, kondensator, cewka, tranzystor, wzmacniacz operacyjny, źródła napięcia i prądu.

W niniejszym rozdziale będziemy rozpatrywać elementarne obwody utworzone z najbardziej podstawowych elementów-oporników, kondensatorów i cewek-zasilane ze źródeł napięcia. Większość podanych tu praw, zależności i definicji ujęto w sposób poglądowy. W dalszym ciągu zostaną one uogólnione i rozszerzone z zachowaniem pełnej precyzji.

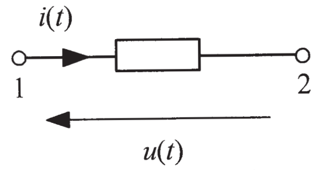
Graficznym obrazem obwodu jest jego schemat pokazujący połączenie elementów reprezentowanych za pomocą odpowiednich symboli. Elementy 2-końcówkowe wyznaczają gałęzie obwodu, zaś punkty, w których łączą się dwie lub więcej gałęzie nazywamy węzłami i zaznaczamy za pomocą kropki.

W obwodach elektrycznych rozpatruje się napięcia pomiędzy węzłami oraz prądy płynące w gałęziach. Na ogół zarówno napięcia, jak i prądy zmieniają się w czasie, a ich kształty mogą być różnorodne. Z tego powodu ogólnie nie jest możliwe określenie rzeczywistego kierunku przepływu prądu oraz biegunowości napięcia. Konieczne jest więc przyjęcie pewnych kierunków odniesienia. Dla każdego prądu przyjmuje się kierunek odniesienia zaznaczony za pomocą strzałki, jak to pokazano na rys. 1.1.1, przedstawiający dowolny element dwukońcówkowy, oznaczony za pomocą prostokąta.

Jeżeli w chwili t_1 prąd wynosi 0,5A, czyli $i(t_1) = 0{,}5\text{A}$,to oznacza, że w rozpatrywanej chwili prąd równy 0,5A płynie zgodnie ze strzałką, czyli wpływa do elementu poprzez zacisk 1 i opuszcza element poprzez zacisk 2. Jeżeli w innej chwili t_2 prąd wynosi –1,2A, czyli $i(t_2) = -1{,}2\text{A}$, to oznacza, że w rozpatrywanej chwili prąd płynie w kierunku przeciwnym do wskazanego przez strzałkę, czyli wpływa do elementu poprzez zacisk 2. Stąd wynika, że znajomość znaku i wartości prądu w danej chwili oraz kierunku odniesienia umożliwia jednoznaczne określenie rzeczywistego prądu w tej chwili.



Rys. 1.1.1. Element 2-końcówkowy z zaznaczonym kierunkiem odniesienia prądu



Rys. 1.1.2. Element 2-końcówkowy z zaznaczonymi kierunkami odniesienia prądu i napięcia

Na rysunku 1.1.2 zaznaczono ponadto kierunek odniesienia napięcia *u*(*t*) za pomocą strzałki pomiędzy zaciskami 1 i 2. Jeżeli w pewnej chwili t_1 napięcie wynosi 12V, czyli $u(t_1) = 12\text{V}$, to oznacza, że w rozpatrywanej chwili potencjał elektryczny zacisku 1 jest o 12V większy niż potencjał zacisku 2. Jeżeli w innej chwili t_2 napięcie wynosi –6V, czyli $u(t_2) = -6\text{V}$, to oznacza, że w chwili t_2 potencjał zacisku 1 jest o 6V mniejszy od potencjału zacisku 2. Napięcie *u*(*t*) wzdłuż elementu nosi nazwę napięcia gałęziowego.

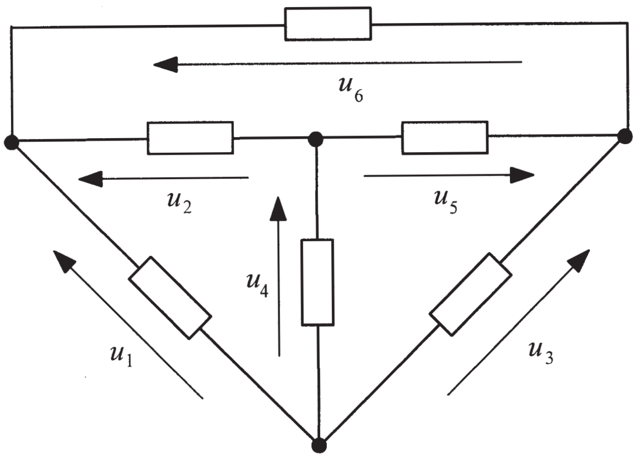
Często, w celu uproszczenia zapisu, będziemy opuszczać literę *t*, oznaczając napięcie przez *u* zamiast *u*(*t*). Podobna zasada będzie stosowana w stosunku do prądu.

Jeżeli kierunki odniesienia prądu oraz napięcia gałęziowego są takie jak pokazano na rys. 1.1.2, czyli strzałki prądu i napięcia mają przeciwne zwroty, to mówimy, że prąd i napięcie mają stowarzyszone kierunki odniesienia. Taką konwencję będziemy przyjmowali w całym kursie teorii obwodów. W przyszłości będziemy ponadto zastępować zwrot *kierunek odniesienia prądu lub napięcia* zwrotem uproszczonym: *kierunek prądu lub napięcia.*

1.2. Prawa Kirchhoffa

Prawa Kirchhoffa należą do najbardziej ogólnych i fundamentalnych zasad obowiązujących w obwodach elektrycznych. Rozróżniamy napięciowe prawo Kirchhoffa (w skrócie NPK) oraz prądowe prawo Kirchhoffa (w skrócie PPK).

Aby sformułować NPK należy wprowadzić pojęcie pętli. Jest to pojęcie topologiczne, które zostanie precyzyjnie zdefiniowane w rozdziale 3. Chwilowo przyjmiemy, że jest to zbiór elementów zaczynających się w jednym węźle, obejmujący kolejne połączone ze sobą gałęzie i kończący się w tym samym węźle. Przykładowo w obwodzie z rys. 1.2.1 pętle tworzą gałęzie o numerach 1,2,4 oraz 2,6,3,4.



Rys. 1.2.1. Obwód przykładowy służący do ilustracji NPK

Napięciowe prawo Kirchhoffa formułujemy w danej pętli, przyjmując dowolnie kierunek obiegu w tej pętli. Kierunek obiegu może być zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Napięciowe prawo Kirchhoffa (NPK)

Rozpatrujemy dowolny obwód elektryczny i wyodrębniamy w tym obwodzie dowolną pętlę. W każdej chwili t suma algebraiczna napięć gałęziowych w rozpatrywanej pętli równa się zeru. Składniki sumy algebraicznej piszemy ze znakiem plus, jeżeli kierunki napięć gałęziowych są zgodne z kierunkiem obiegu i ze znakiem minus w przypadku przeciwnym.

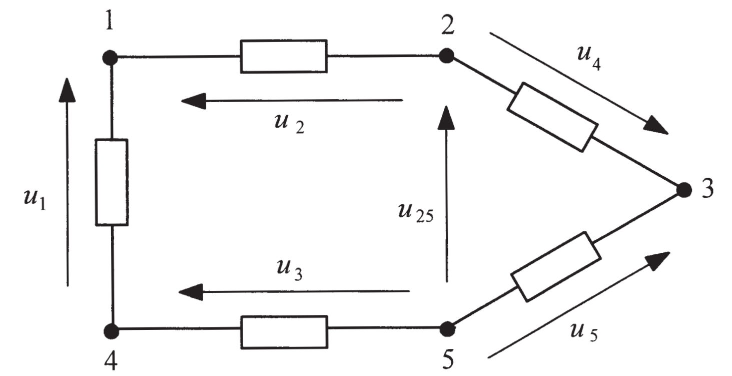
W celu zilustrowania NPK rozpatrujemy obwód z rys. 1.2.1 i wybieramy pętlę utworzoną z gałęzi 1,2,4. Przyjmując kierunek obiegu pętli zgodny z ruchem wskazówek zegara, otrzymujemy następujące równanie wynikające z NPK:

$$u_1 - u_2 - u_4 = 0 .$$

Dla pętli utworzonej z gałęzi 4,2,6,3, w której przyjmujemy kierunek obiegu przeciwny do ruchu wskazówek zegara, równanie NPK jest następujące:

$$u_3 + u_6 - u_2 - u_4 = 0.$$

Sformułowane wyżej napięciowe prawo Kirchhoffa zostało wyrażone w kategoriach napięć gałęziowych. Bardziej ogólną wersję tego prawa otrzymujemy rozpatrując tzw. zamknięty ciąg węzłów, czyli zbiór węzłów zaczynający się i kończący w tym samym węźle. Przykładowo, w obwodzie pokazanym na rys. 1.2.2 węzły 1,2,5,4,1 tworzą zamknięty ciąg węzłów.



Rys. 1.2.2. Obwód przykładowy służący do ilustracji NPK

Korzystając z pojęcia zamkniętego ciągu węzłów możemy wyrazić NPK w poniższy sposób.

W dowolnym obwodzie, dla każdego zamkniętego ciągu węzłów w dowolnej chwili, suma algebraiczna napięć występujących pomiędzy węzłami tworzącymi ciąg zamknięty, jest równa zeru. Zauważmy, że kierunek obiegu jest obecnie wymuszony przez przyjęty ciąg węzłów i ustalając znak napięć w wyznaczonej wyżej sumie algebraicznej, porównujemy kierunki napięć z kierunkiem obiegu podobnie, jak w poprzedniej wersji NPK. Przyjmując przykładowo w obwodzie z rys. 1.2.2 zamknięty ciąg węzłów 1,2,5,4,1, otrzymujemy równanie wynikające z NPK:

$$-u_2 - u_{25} + u_3 + u_1 = 0.$$

Prądowe prawo Kirchhoffa (PPK)

Dla każdego obwodu i dowolnego jego węzła, w każdej chwili, suma algebraiczna prądów w gałęziach zbiegających się w tym węźle jest równa zeru.

W wyznaczonej wyżej sumie algebraicznej przypisujemy prądowi znak plus, jeżeli jego kierunek jest od węzła i znak minus w przypadku, gdy strzałka prądu jest skierowana do węzła. Powyższą zasadę będziemy stosować konsekwentnie w całym kursie teorii obwodów mimo, że dopuszczalne jest również przyjęcie przeciwnej reguły.

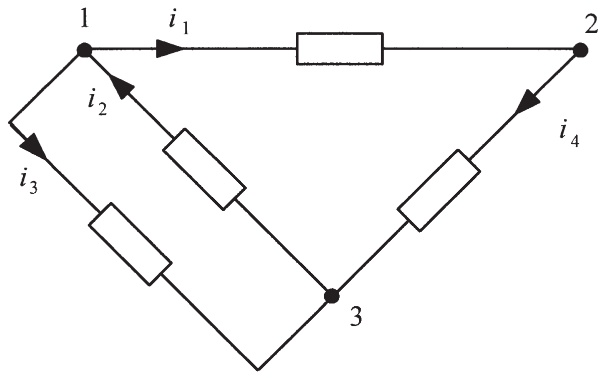
W celu zilustrowania prądowego prawa Kirchhoffa rozpatrzymy obwód z rys. 1.2.3 i zastosujemy PPK do węzła 1

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0\,.$$

Podobnie dla węzła 3 otrzymujemy

$$i_2 - i_3 - i_4 = 0\,.$$

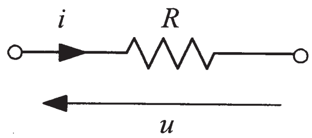
Należy podkreślić, że prawa Kirchhoffa dotyczą struktury geometrycznej obwodu, czyli jego topologii i nie zależą od rodzaju elementów umieszczonych w poszczególnych gałęziach. Zagadnienia dotyczące praw Kirchhoffa będą rozszerzone i uogólnione w rozdziale 3.



Rys. 1.2.3. Obwód przykładowy służący do ilustracji PPK

1.3. Proste obwody rezystancyjne

Najprostszym elementem obwodów elektrycznych jest opornik liniowy. Symbol opornika jest pokazany na rys. 1.3.1.



Rys. 1.3.1. Opornik liniowy

Zgodnie z prawem Ohma napięcie wzdłuż opornika jest proporcjonalne do prądu płynącego w oporniku, czyli

$$u = Ri\,, \tag{1.3.1}$$

gdzie współczynnik proporcjonalności oznaczony przez R nosi nazwę oporu i jest wyrażony w omach

$$1\Omega = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\,.$$

Zależność (1.3.1) można zapisać w postaci równoważnej

$$i = Gu\,, \tag{1.3.2}$$

gdzie $G = R^{-1}$ jest przewodnością, a jej jednostką jest simens

$$1\mathrm{S} = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\,.$$

Pokazany na rys. 1.3.2 obwód stanowi połączenie szeregowe dwóch oporników R_1 i R_2. W obu opornikach płynie ten sam prąd, wobec czego stosując NPK oraz prawo Ohma otrzymujemy:

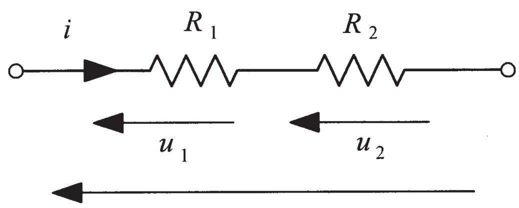
$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i = \left(R_1 + R_2\right) i\,.$$

Stąd wynika zależność

$$\frac{u}{i} = R_1 + R_2\,, \tag{1.3.3}$$

co oznacza, że połączenie szeregowe oporników R_1 i R_2 można zastąpić opornikiem równoważnym o oporze

$$R = R_1 + R_2\,. \tag{1.3.4}$$



Rys. 1.3.2. Szeregowe połączenie dwóch oporników

Tak więc opór szeregowego połączenia jest większy od oporu każdego z oporników tworzących to połączenie. Napięcie występujące na zaciskach omawianego połączenia jest sumą napięć u_1 oraz u_2 określonych wzorami:

$$u_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u , \qquad u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u ,$$

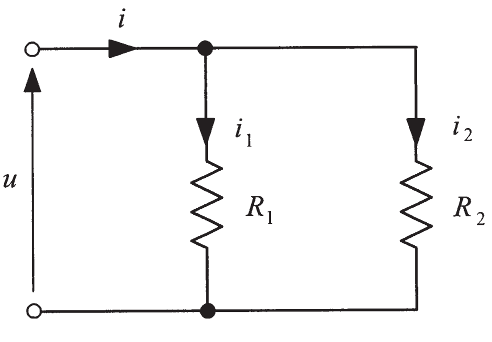
gdzie skorzystano z zależności (1.3.3). Z tego powodu połączenie szeregowe oporników R_1 i R_2 można uważać za dzielnik napięcia, w którym napięcie u ulega podziałowi na napięcia u_1 oraz u_2 takie, że

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{R_1}{R_2} .$$

Wzór (1.3.4) natychmiast uogólnia się na przypadek szeregowego połączenia n oporników R_1, R_2 ... , R_n:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n . \tag{1.3.5}$$

Rysunek 1.3.3 przedstawia równoległe połączenie dwóch oporników R_1 oraz R_2.



Rys. 1.3.3. Równoległe połączenie dwóch oporników

Napięcie na obu opornikach jest jednakowe i równe napięciu u, natomiast prąd i, zgodnie z PPK, spełnia równanie

$$i = i_1 + i_2 .$$

Ponieważ, w myśl prawa Ohma, zachodzi

$$i_1 = \frac{u}{R_1}, \qquad \mathrm{i}_2 = \frac{u}{R_2},$$

więc wynika stąd zależność

$$i = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u .$$

A zatem

$$\frac{i}{u} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

gdzie lewa strona równania oznacza przewodność $G = R^{-1}$ opornika, który jest równoważny rozpatrywanemu połączeniu. Tak więc

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{1.3.6}$$

lub

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{1.3.7}$$

Zależność (1.3.6) pokazuje, że rezystancja równoległego połączenia jest mniejsza od rezystancji każdego opornika tworzącego to połączenie. Korzystając z zależności

$$u = Ri = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

obliczamy prądy i_1 oraz i_2 stosując prawo Ohma:

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \qquad i_2 = \frac{u}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i . \tag{1.3.8}$$

Stwierdzamy więc, że w rozpatrywanym połączeniu prąd i rozdziela się na prądy i_1 oraz i_2 zgodnie ze wzorami (1.3.8), które prowadzą do relacji

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Wobec tego połączenie równoległe dwóch oporników można uważać za dzielnik prądu.

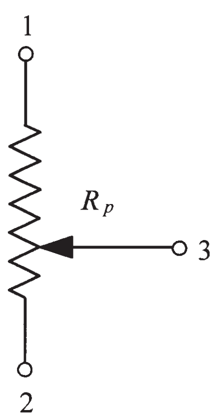
Wzór (1.3.6) natychmiast uogólnia się na przypadek n oporników $R_1, R_2, \ldots, R_n$ połączonych równolegle:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{1.3.9}$$

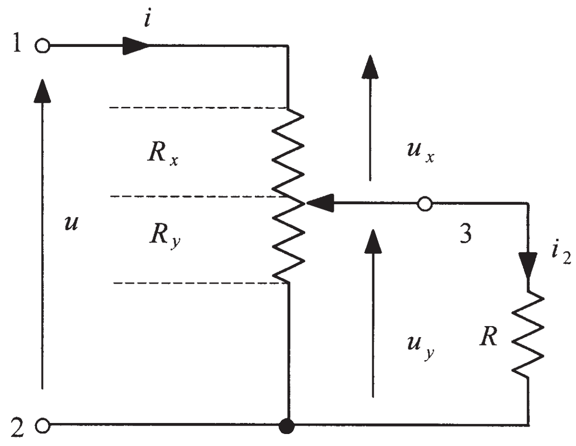
Opornik 3-końcówkowy, pokazany na rys. 1.3.4, nosi nazwę potencjometru. Zacisk 3 jest ruchomy i może przyjmować dowolne położenie ślizgając się wzdłuż opornika R_p.

Rysunek 1.3.5 przedstawia potencjometr R_p zasilany napięciem u z dołączonym do zacisków 3 i 2 dodatkowym opornikiem R. Przypuśćmy, że suwak potencjometru jest ustawiony w położeniu dzielącym opór R_p na R_x oraz R_y, gdzie

$$R_p = R_x + R_y.$$



Rys. 1.3.4. Potencjometr



Rys. 1.3.5. Obwód złożony z potencjometru i opornika R

W tej sytuacji rozpatrywany obwód można traktować jako szeregowe połączenie opornika R_x oraz połączenia równoległego oporników R_y oraz R. A zatem opór widziany z zacisków 1, 2 jest określony wzorem

$$R = R_x + \frac{R_y R}{R_y + R}.$$

Wobec tego prąd i wynosi

$$i = \frac{u}{R_x + \dfrac{R_y R}{R_y + R}},$$

natomiast napięcie u_y określa wzór

$$u_y = \frac{R_y R}{R_y + R} i = \frac{R_y R}{R_y + R} \quad \frac{u}{R_x + \dfrac{R_y R}{R_y + R}},$$

a zatem

$$u_y = \frac{R_y R}{R_x (R_y + R) + R_y R} u . \tag{1.3.10}$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy suwak znajduje się w górnym krańcowym położeniu, wówczas $R_x = 0$ oraz $u_y = u$. W dolnym krańcowym położeniu suwaka $R_y = 0$ oraz $u_y = 0$. Tak więc przesuwając suwak od dołu do góry zwiększamy napięcie u_y od 0 do u. Jeżeli suwak zajmie środkowe położenie, czyli takie, że $R_x = R_y$, to napięcie u_y będzie mniejsze od $\frac{1}{2}u$, bowiem opór połączenia równoległego R_y oraz R jest mniejszy od oporu $R_x = R_y$. Aby zrealizować równość

$$u_y = \frac{1}{2} u$$

należy ustawić suwak w takim położeniu, żeby

$$R_x = \frac{R_y R}{R_y + R} .$$

Ponieważ $R_y = R_p - R_x$, więc wynika stąd relacja

$$R_x = \frac{(R_p - R_x) R}{R_p - R_x + R},$$

lub po elementarnych przekształceniach

$$R_x^2 - (R_p + 2R)R_x + R_p R = 0. \qquad (1.3.11)$$

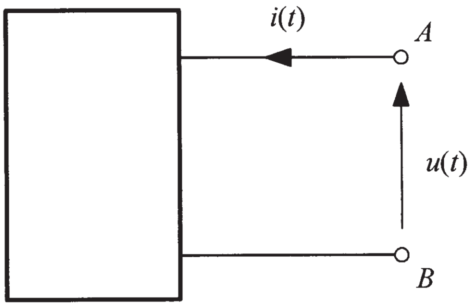
Powyższe równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste dodatnie, z których wybieramy następujący:

$$R_x = \frac{R_p + 2R - \sqrt{(R_p + 2R)^2 - 4R_p R}}{2} = \frac{1}{2}R_p + R - \frac{1}{2}\sqrt{R_p^2 + 4R^2}\ .$$

Drugi pierwiastek jest większy od R_p i wobec tego nie może być zrealizowany.

1.4. Moc i energia

W niniejszym rozdziale będziemy rozpatrywali obwody 2-końcówkowe, zwane dwójnikami. Dwójnikiem może być pojedynczy element 2-końcówkowy lub połączenie elementów, z których wyprowadzono na zewnątrz dwie końcówki (rys. 1.4.1).



Rys. 1.4.1. Dwójnik *AB*

Rozpatrzymy dwójnik pokazany na rys. 1.4.1 zasilany z generatora o napięciu $u(t)$ i oznaczymy prąd tego dwójnika przez $i(t)$. Jak wiadomo z fizyki, moc chwilowa dwójnika jest iloczynem napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$

$$p(t) = u(t)\,i(t)\,. \qquad (1.4.1)$$

Jeżeli napięcie $u(t)$ jest wyrażone w woltach, a prąd $i(t)$ w amperach, to moc chwilowa jest określona w watach

$$1\mathrm{W} = 1\mathrm{VA}\,.$$

Energia dostarczona z generatora do dwójnika w czasie od t_0 do t wynosi

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, i(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.4.2}$$

gdzie czas będący zmienną całkową oznaczono literą τ, w celu odróżnienia od chwili t występującej w górnej granicy całkowania.
Jeżeli moc chwilowa $p(t)$ jest wyrażona w watach, to energia $w(t_0, t)$ jest określona w dżulach

$$1\mathrm{J} = 1\mathrm{Ws}.$$

Rozpatrzymy szczególny przypadek, gdy dwójnik AB jest opornikiem o oporze R, wówczas zachodzi:

$$u(t) = Ri(t), \qquad i(t) = \frac{1}{R}u(t),$$

a zatem

$$p(t) = u(t)i(t) = R(i(t))^2 = \frac{1}{R}(u(t))^2. \tag{1.4.3}$$

Na podstawie wzoru (1.4.3) stwierdzamy, że moc opornika liniowego jest w każdej chwili t nieujemna.

1.5. Kondensator liniowy

1.5.1. Wiadomości podstawowe

Kondensator należy do najbardziej rozpowszechnionych elementów obwodów elektrycznych. Jego cechą charakterystyczną jest gromadzenie ładunku elektrycznego. Ładunek $q(t)$ kondensatora liniowego jest proporcjonalny do napięcia $u(t)$ na zaciskach kondensatora

$$q(t) = Cu(t), \tag{1.5.1}$$

gdzie współczynnik proporcjonalności C nosi nazwę pojemności kondensatora. Jednostką pojemności jest farad (w skrócie F), przy czym

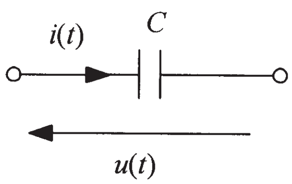
$$1\mathrm{F} = 1\frac{C}{\mathrm{V}} .$$

Prąd $i(t)$ płynący przez kondensator (rys.1.5.1) jest równy pochodnej ładunku względem czasu

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} .$$

Uwzględniając zależność (1.5.1) otrzymujemy

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} . \qquad (1.5.2)$$



Rys. 1.5.1. Kondensator liniowy

Wzór (1.5.2) wyraża prąd płynący przez kondensator w zależności od napięcia na jego zaciskach. W celu uzależnienia napięcia od prądu zastępujemy t przez τ i całkujemy obie strony równania (1.5.2) w granicach od 0 do t

$$\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau = C\int_0^t \frac{\mathrm{d}u(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau = C\int_{u(0)}^{u(t)} \mathrm{d}u = C\big(u(t) - u(0)\big).$$

Stąd wynika poszukiwana relacja

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau , \qquad (1.5.3)$$

gdzie $u(0)$ jest napięciem początkowym kondensatora występującym w chwili t=0. Zależność (1.5.3) wskazuje, że napięcie na kondensatorze w chwili t zależy od napięcia początkowego $u(0)$ oraz od przebiegu prądu w przedziale czasu 0–t. Z tego powodu mówimy, że kondensator pamięta przeszłość.

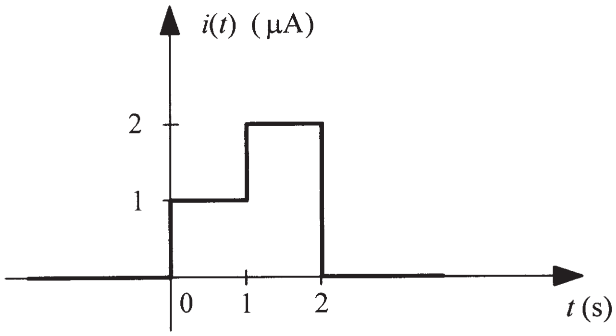
Przykład 1.1

Rozpatrzymy kondensator o pojemności $C = 1\mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}$ i napięciu początkowym $u(0) = -1\mathrm{V}$, którego prąd $i(t)$ ma kształt przedstawiony na rys. 1.5.2. W celu obliczenia napięcia $u(t)$ kondensatora korzystamy z zależności (1.5.3). Ze względu na kształt prądu wyodrębniamy trzy przedziały czasu:

$$0 \le t \le 1: \quad u(t) = -1 + \frac{1}{10^{-6}} \int_0^t 10^{-6} \mathrm{d}\tau = -1 + t,$$

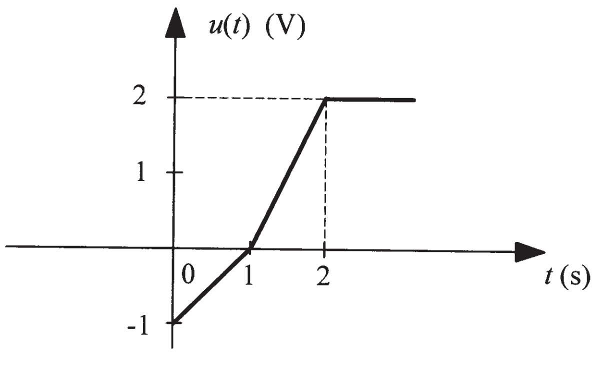
$$1 \le t \le 2: \quad u(t) = -1 + \frac{1}{10^{-6}} \int_0^1 10^{-6} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{10^{-6}} \int_1^t 2 \cdot 10^{-6} \mathrm{d}\tau = 2(t-1),$$

$$t > 2: \quad u(t) = u(2) = 2.$$



Rys. 1.5.2. Kształt prądu $i(t)$

Wynik dla $t > 2$ jest konsekwencją faktu, że prąd $i(t)$ jest wówczas równy zeru, wobec czego kondensator nie może ulec rozładowaniu. Jego ładunek nie ulega zmianie, a co za tym idzie również napięcie pozostaje stałe (patrz (1.5.1)).Na rysunku 1.5.3 pokazano przebieg napięcia kondensatora w funkcji czasu.



Rys. 1.5.3. Napięcie kondensatora rozpatrywanego w przykładzie