

Spis treści

1	Pole elektrodynamiczne	7
1.1	Opis pola za pomocą wektorów \mathbf{E} i \mathbf{H}	7
1.1.1	Równania pola	7
1.2	Twierdzenie Poyntinga	10
1.3	Opis pola za pomocą potencjałów	13
1.3.1	Definicje	13
1.3.2	Równania potencjałów	16
1.3.3	Rozwiązanie równań falowych potencjałów	18
1.3.3.1	Równanie Helmholtza dla transformat	18
1.3.3.2	Metoda funkcji Greena	20
1.3.3.3	Potencjały opóźnione	23
1.4	Uogólnienie praw znanych ze statyki i pola stacjonarnego na dynamikę	34
1.4.1	Prawo Coulomba	34
1.4.2	Prawo Biota-Savarta	37
1.5	Elektromagnetydyynamika	41
1.5.1	Modelowanie warunków brzegowych za pomocą fikcyjnych źródeł pola	41
1.5.2	Równania pola indukowanego „ładunkami” i „prądami” magnetycznymi.	46
1.5.3	Opis pola wytwarzanego przez „ładunki” i „prądy” magnetyczne za pomocą potencjałów	48
1.5.3.1	Wektorowy potencjał elektryczny	48
1.5.3.2	Skalarny potencjał magnetyczny	49
2	Fale	51
2.1	Podstawowe definicje	51
2.2	Fala w dielektryku bez strat	55
2.2.1	Fala płaska	55

2.2.1.1	Rozwiązanie równania falowego	55
2.2.1.2	Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego	60
2.2.1.3	Związek natężenia pola elektrycznego i magnetycznego	63
2.2.2	Fala kulista	65
2.2.2.1	Rozwiązanie równania falowego	65
2.2.2.2	Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego	68
2.2.2.3	Związek natężenia pola elektrycznego i magnetycznego	69
2.3	Dipol Hertza	72
2.3.1	Pole wytwarzane przez dipol	72
2.3.1.1	Model układu	72
2.3.1.2	Opis pola za pomocą potencjałów	74
2.3.1.3	Opis pola za pomocą wektorów \mathbf{B} i \mathbf{E}	77
2.3.2	Strefa bliska	82
2.3.3	Strefa promieniowania	84
3	Harmoniczne pole elektrodynamiczne	87
3.1	Opis pola za pomocą wektorów \mathbf{E} i \mathbf{H}	87
3.1.1	Równania Maxwella	87
3.1.2	Właściwości wektorów zespolonych	90
3.1.3	Zależności materiałowe	91
3.1.3.1	Polaryzacja	92
3.1.3.2	Magnesowanie	101
3.1.3.3	Przewodzenie	102
3.1.4	Równania pola w obszarze bez źródeł	102
3.2	Moce zespolone w polu harmonicznym	104
3.2.1	Wzory określające różne rodzaje mocy	104
3.2.1.1	Założenia i definicje	104
3.2.1.2	Moc przenikająca przez granice obszaru	105
3.2.1.3	Moc rozpraszana w wyniku przewodzenia	110
3.2.1.4	Moc pola magnetycznego	112
3.2.1.5	Moc pola elektrycznego	116
3.2.2	Twierdzenie Poyntinga	120
3.2.3	Moc przenoszona przez falę	127
3.3	Impedancja	128
3.4	Opis pola za pomocą potencjałów	131
3.4.1	Równania potencjałów	131
3.4.2	Rozwiązanie równań potencjałów	133
3.5	Opis pola za pomocą potencjałów Hertza	137

3.6	Dielektryk stratny	140
3.7	Naskórkowość	145
3.7.1	Rozkład gęstości prądu	145
3.7.2	Wpływ naskórkowości na opór i indukcyjność przewodu	155
3.8	Zbliżenie	158

4 Fale harmoniczne 165

4.1	Fala płaska w obszarze nieograniczonym	165
4.1.1	Właściwości	165
4.1.1.1	Zmienność amplitudy i fazy w przestrzeni	165
4.1.1.2	Kierunek wektora natężenia pola	172
4.1.1.3	Związek natężenia pola elektrycznego i magnetycznego	173
4.1.2	Fala płaska w dielektryku bez strat	180
4.1.3	Fala płaska w przewodniku	181
4.2	Polaryzacja fali harmonicznej	182
4.2.1	Rodzaje polaryzacji	182
4.2.2	Parametry Stokesa	188
4.3	Dipol Hertza	193
4.3.1	Pole elektromagnetyczne wytwarzane przez dipol	193
4.3.1.1	Potencjał wektorowy	193
4.3.1.2	Natężenie pola magnetycznego	194
4.3.1.3	Natężenie pola elektrycznego	196
4.3.2	Pole w strefie dalekiej	200
4.3.3	Pole w strefie bliskiej	203
4.4	Twierdzenie Lorentza o wzajemności	204
4.4.1	Treść twierdzenia	204
4.4.2	Związek antenowych charakterystyk promieniowania i odbioru	207
4.5	Twierdzenie o jednoznaczności	211
4.6	Metoda obrazów	216
4.6.1	Elektryczny dipol Hertza umieszczony równolegle do powierzchni elektrycznego przewodnika idealnego	216
4.6.2	Magnetyczny dipol Hertza umieszczony równolegle do powierzchni elektrycznego przewodnika idealnego	221
4.7	Promieniowanie prądów płynących powierzchnią przewodnika idealnego	225
4.7.1	Przewodnik elektryczny	225
4.7.2	Przewodnik magnetyczny	227
4.8	Zasady równoważności	228

4.8.1	Przestrzenna zasada równoważności	228
4.8.2	Powierzchniowa zasada równoważności	231
4.8.2.1	Przypadek ogólny	231
4.8.2.2	Zasada równoważności Love'a	233
4.8.2.3	Zasada równoważności z wykorzystaniem elektrycznego przewodnika idealnego	235
4.8.2.4	Zasada równoważności z wykorzystaniem magnetycznego przewodnika idealnego	236
4.8.3	Wykorzystanie zasady równoważności do obliczania promieniowania anteny szczelinowej	237
	Bibliografia	241

Rozdział 1

Pole elektrodynamiczne

1.1 Opis pola za pomocą wektorów \mathbf{E} i \mathbf{H}

1.1.1 Równania pola

W elektrodynamice pole elektromagnetyczne opisują równania Maxwella w postaci ogólnej:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_s, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

W niniejszym paragrafie rozpatrywać będziemy równania pola elektromagnetycznego przy następujących założeniach:

- * środowisko jest dielektrykiem:
 - z upływnością ($\gamma \neq 0$),
 - liniowym ($\varepsilon(\mathbf{E}) = \operatorname{const}$, $\mu(\mathbf{B}) = \operatorname{const}$, $\gamma(\mathbf{E}) = \operatorname{const}$),
 - jednorodnym ($\varepsilon(\mathbf{r}) = \operatorname{const}$, $\mu(\mathbf{r}) = \operatorname{const}$, $\gamma(\mathbf{r}) = \operatorname{const}$),
 - izotropowym (γ , ε , μ są liczbami rzeczywistymi),
 - niedyspersyjnym (ε , μ i γ nie zależą od szybkości zmian \mathbf{E} i \mathbf{B}),
 - stacjonarnym ($\varepsilon(t) = \operatorname{const}$, $\mu(t) = \operatorname{const}$, $\gamma(t) = \operatorname{const}$);
- * w rozważanym obszarze nie występują ładunki swobodne ($\rho_s = 0$) i prądy wymuszone ($\mathbf{J}_s = \gamma\mathbf{E}$).

Wymienione właściwości posiada wiele ośrodków. Przykładem może być tu atmosfera ziemiska, w której rozchodzą się fale radiowe. Uwzględniając uczynione założenia w równaniach (1.1) ... (1.4), zapiszemy je obecnie w postaci:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Przypomnijmy obecnie zasadę – wynikającą z matematyki – która mówi, że pole wektorowe może zostać wyznaczone jednoznacznie, gdy znane są jego rotacja i dywergencja oraz określony jest warunek brzegowy. Zauważmy, że równania (1.5) i (1.6) jednoznacznie określają pole \mathbf{E} , gdy znany jest rozkład pola magnetycznego (\mathbf{H}). Analogicznie równania (1.7) i (1.8) pozwalają obliczyć \mathbf{H} , gdy znane jest pole elektryczne. Przedstawione obserwacje można podsumować za pomocą poniższego wniosku.

Wniosek 1.1 Wobec braku ładunków swobodnych i prądów wymuszonych, znajomość tylko jednej z funkcji — natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} lub natężenia pola magnetycznego \mathbf{H} — (przy określonych warunkach brzegowych) jednoznacznie określa pole elektromagnetyczne w rozważanym obszarze.

Obecnie spróbujemy zapisać równania polowe w innej postaci. Obliczając rotację obu stron równań (1.6) i (1.8) oraz uwzględniając tożsamości $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ oraz $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$, mamy

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (1.10)$$

Wstawiając prawe strony zależności (1.5) i (1.8) do (1.9) oraz (1.7) i (1.6) do (1.10), dostajemy

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1.11)$$

oraz

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (1.12)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy ostatecznie

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

Gdy ośrodkiem, w którym będziemy badać rozchodzenie się fal, będzie dielektryk bez strat ($\gamma = 0$), równania wektorów pola przyjmą prostszą postać. Wprowadzimy obecnie inne oznaczenie współczynnika liczbowego $\varepsilon \mu$. Podstawimy

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{v^2}.$$

Sens fizyczny wielkości oznaczonej symbolem v zostanie wyjaśniony w dalszej części wykładu. Wprowadzając wymienione modyfikacje do (1.13) i (1.14), mamy

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

oraz

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.16)$$

Otrzymane ostatnio równania, z powodu roli jaką odgrywają w opisie zjawisk falowych, noszą nazwę *równań falowych*. Popularność wyprowadzonych równań spowodowała, że wprowadzono specjalny operator, określający działania wykonywane na funkcji, która jest niewiadomą w równaniu falowym. Operator ten nazwany został *operatorem d'Alemberta* (lub d'alambercjanem) i oznaczony symbolem o kształcie kwadratu. Działania przypisane wymienionemu operatorowi są następujące:

$$\square(*) = \nabla^2(*) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2}, \quad (1.17)$$

przy czym w miejsce znaku $(*)$ należy wstawić symbol funkcji poddawanej działaniu operatora. Równania falowe wektorów opisujących pole elektromagnetyczne możemy zapisać teraz w bardzo zwartej postaci:

$$\square \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.18)$$

$$\square \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (1.19)$$

1.2 Twierdzenie Poyntinga

Przypomnimy, poznaną w części pierwszej niniejszego skryptu (paragraf 4.4 od strony 244), ogólną postać równania Poyntinga:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{energia (np. mechaniczna lub che-} \\ \text{miczna) przekształcana w obsza-} \\ \text{rze } v \text{ w energię pola elektromagne-} \\ \text{tycznego na jednostkę czasu} \end{array} \right\} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_v w \, dv = \iint_{s(v)} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} + \left\{ \begin{array}{l} \text{energia pola przekształcana} \\ \text{w obszarze } v \text{ na ciepło oraz} \\ \text{pracę mechaniczną na jed-} \\ \text{nostkę czasu} \end{array} \right\}. \quad (1.20)$$

W przedstawionym wzorze w oznacza gęstość przestrzenną energii pola elektromagnetycznego, $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v w \, dv$ oznacza moc pola znajdującego się w obszarze v , ograniczonego powierzchnią s , a $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ jest wektorem Poyntinga.

W prowadzonych rozważaniach przyjmujemy, że w obszarze v nie ma zamiany innych rodzajów energii w energię pola elektromagnetycznego oraz procesów, w których energia pola przechodzi w inne formy, z wyjątkiem zjawiska, w którym wytwarzane jest ciepło w wyniku przepływu prądu. Zgodnie z prawem Joule'a, przedstawionym we wniosku 4.6, ze strony 185 części pierwszej skryptu, gęstość przestrzenna rozpraszanej mocy pola p_s jest równa

$$p_s = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E}. \quad (1.21)$$

Zastosowanie przyjętych założeń powoduje, że równanie (1.20) przyjmie postać

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v w \, dv = \iint_{s(v)} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} + \iiint_v \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} \, dv. \quad (1.22)$$

W celu ustalenia sposobu, w jaki moc pola zawartego w obszarze v , przedstawiona po lewej stronie zależności (1.22), wyrażona jest za pomocą wektorów \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} i \mathbf{B} , wykorzystamy prawa Faradaya i Ampère'a-Maxwella:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.23)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{d\mathbf{D}}{dt}. \quad (1.24)$$

Pierwszą z zapisanych powyżej zależności pomnożymy skalarnie przez \mathbf{H} , a drugą przez \mathbf{E} . Dostajemy wówczas

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.25)$$

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt}. \quad (1.26)$$

W dalszym ciągu przekształceń odejmiemy otrzymane równania stronami:

$$\underbrace{\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}}_{-\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Następnie dokonamy podstawienia, wykorzystując tożsamość

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Wzór (1.27) przyjmie wówczas postać

$$-\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Przenosząc odpowiednio składniki, mamy

$$-\left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E}. \quad (1.29)$$

Obecnie wykonamy całkowanie zależności (1.29) na cały obszar v i wykorzystamy prawo Gaussa. Otrzymamy wówczas ostatecznie

$$-\iiint_v \left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) dv = \iint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} + \iiint_v \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} dv. \quad (1.30)$$

Równanie (1.30) wyraża bilans mocy pola elektromagnetycznego, zawartego w obszarze o objętości v , w rozważanym przypadku i stanowi treść twierdzenia Poyntinga. Sens fizyczny składników, występujących w przedstawionej zależności, przedstawiono w tabeli (1.1).

Porównując prawe strony zależności (1.22) i (1.30), możemy ustalić w jaki sposób gęstość przestrzenna mocy pola zależy od wektorów \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} i \mathbf{H} .

Tablica 1.1: Sens fizyczny składników równania Poyntinga, zapisanego dla pola elektromagnetycznego zawartego w obszarze v , którego brzegiem jest powierzchnia s

składnik równania	sens fizyczny
$-\iiint_v \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv$	ubytek (ze względu na znak minus przed wzorem) energii pola na jednostkę czasu
$\oiint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$	moc wypromieniowana (ponieważ powierzchnia s została zorientowana na zewnątrz) z obszaru
$\iiint_v \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} dv$	moc przetwarzana na ciepło w wyniku przepływu prądu

Wniosek 1.2 Gęstość przestrzenna mocy pola elektromagnetycznego p_{em} wyraża się wzorem:

$$p_{em} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Gdy ośrodek, w którym rozważamy pole, jest stacjonarny i niedispersyjny, a jego polaryzacja i magnesowanie nie wiążą się ze stratami, to możemy napisać

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right). \quad (1.32)$$

Postępując analogicznie dla pola magnetycznego, otrzymamy

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right). \quad (1.33)$$

Wówczas równanie (1.20) przyjmie postać:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) dv = \iint_{s(v)} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} + \iiint_v \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{E} dv \quad (1.34)$$

Jeżeli rozpatrywane pole znajduje się o osrodku izotropowym, to zachodzi

$$\mathbf{E} \parallel \mathbf{D} \quad \text{i} \quad \mathbf{B} \parallel \mathbf{H}. \quad (1.35)$$

Możemy wówczas zapisać

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \frac{E^2}{2} \right), \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{H^2}{2} \right). \quad (1.37)$$

Uwzględniając dodatkowo, że $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \gamma E^2$, dostajemy nową postać zależności wyrażającej twierdzenie Poyntinga:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \left(\epsilon \frac{E^2}{2} + \mu \frac{H^2}{2} \right) dv = \iint_{s(v)} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} + \gamma \iiint_v E^2 dv. \quad (1.38)$$

1.3 Opis pola za pomocą potencjałów

1.3.1 Definicje

Do opisu pola elektrodynamicznego stosuje się jednocześnie dwa potencjały. Pierwszy z nich był poznany w trakcie omawiania pola stacjonarnego. Jest to *magnetyczny potencjał wektorowy* \mathbf{A} zdefiniowany zależnością:

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{df}}{=} \text{rot} \mathbf{A}. \quad (1.39)$$

Wprowadzimy obecnie definicję drugiego potencjału. Punktem wyjścia w prowadzonym rozumowaniu będzie prawo Faradaya:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.40)$$

Wyliminujemy z niego indukcję magnetyczną \mathbf{B} , korzystając z zależności (1.39):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{A})}{\partial t}. \quad (1.41)$$

Brak zależności zmiennych przestrzennych i czasu pozwala na zamianę kolejności wykonywania operacji obliczania rotacji i różniczkowania względem t po prawej stronie równania (1.41):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (1.42)$$

Po przeniesieniu wyrazów na jedną stronę i skorzystaniu z liniowości operatora rotacji mamy

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \quad (1.43)$$

Otrzymany rezultat wskazuje, że pole opisane sumą wektorów $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ jest polem potencjalnym. Można więc zdefiniować w nim potencjał skalarny.

Definicja 1.1 *Skalarnym, elektrycznym potencjałem elektrodynamicznym* nazywamy pole skalarne $V_D(\mathbf{r}, t)$ posiadające właściwość określoną wzorem:

$$-\operatorname{grad} V_D(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.44)$$

przy czym $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ jest natężeniem pola elektrycznego, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ oznacza magnetyczny potencjał wektorowy, \mathbf{r} wskazuje położenie punktu, w którym wyznaczamy potencjał.

Jednostką skalarnego potencjału elektrodynamicznego jest, podobnie jak w przypadku skalarnego potencjału elektrycznego, wolt ($1V = 1\text{m}^2\text{kg s}^{-3}\text{A}^{-1}$).

Zauważmy, że wzory definicyjne (1.39) i (1.44) pozwalają, na podstawie znajomości rozkładu obu wprowadzonych funkcji, zwanych potencjałami, na wyznaczenie natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} i indukcji magnetycznej \mathbf{B} z zależności:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V_D - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.46)$$

Wobec tego stwierdzamy, że znajomość obu wprowadzonych potencjałów stwarza możliwość jednoznacznego określenia pola elektrodynamiczne.

We wnioskach 3.8 (strona 108) i 4.12 (strona 201) części pierwszej niniejszego skryptu wskazano, że definicje potencjałów nie są jednoznaczne. Potencjał skalarny w polach statycznym i stacjonarnym jest określony z dokładnością do skalarne go pola stałego względem zmiennych przestrzennych $C'(t)$. W elektrodynamice, wobec innej definicji, możemy oczekiwać, że potencjał jest określony z dokładnością do pewnej funkcji $C(\mathbf{r}, t)$, zmieniającej się w czasie i przestrzeni. Natomiast potencjały wektorowe pola indukcji magnetycznej \mathbf{B} mogą różnić się o dowolne wektorowe pole potencjalne, które określimy jako $\text{grad}\psi(\mathbf{r}, t)$, przy czym $\psi(\mathbf{r}, t)$ jest dowolnym polem skalarnym. Przyjmijmy, że pewne pole elektromagnetyczne jest opisane jednocześnie za pomocą dwóch par potencjałów V_D i \mathbf{A} oraz V'_D oraz \mathbf{A}' . Wobec poczynionych wyżej uwag możemy zapisać

$$V'_D(\mathbf{r}, t) = V_D(\mathbf{r}, t) + C(\mathbf{r}, t), \quad (1.47)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \text{grad}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.48)$$

Obecnie ustalimy, jakie warunki muszą spełnić pola C i ψ , aby potencjały V_D i \mathbf{A} oraz V'_D i \mathbf{A}' opisywały to samo pole elektromagnetyczne. W tym celu obliczmy wartość \mathbf{E} za pomocą potencjałów primowanych:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V'_D(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Następnie, do powyższej zależności wprowadzimy potencjały bez primów, stosując wzory (1.47) i (1.48):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}\left[V_D(\mathbf{r}, t) + C(\mathbf{r}, t)\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \text{grad}\psi(\mathbf{r}, t)\right]. \quad (1.50)$$

W dalszym ciągu przekształceń pogrupujemy odpowiednio wyrazy i wykorzystamy fakt, że potencjały V_D i \mathbf{A} również wyrażają to samo pole \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{-\text{grad}V_D(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}}_{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} - \text{grad}C(\mathbf{r}, t) - \text{grad}\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.51)$$

Z otrzymanej zależności i liniowości operacji obliczania gradientu wynika

$$\text{grad}\left(C(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right) = \mathbf{0}. \quad (1.52)$$

Wyrażenie, którego gradient jest zerem, nie może zależeć od zmiennych przestrzennych, zatem zachodzi

$$C(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = C_1(t). \quad (1.53)$$

Postać funkcji $C_1(t)$ jest całkowicie dowolna, przyjmiemy więc, że jest ona równa zero. Mamy zatem

$$C(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.54)$$

Z wzoru (1.54) wynika, że ustalając dodatkowe warunki na potencjały, w celu uściślenia wprowadzonych definicji, należy pamiętać o wzajemnym powiązaniu funkcji $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ i $V_D(\mathbf{r}, t)$. Polega ono na tym, że funkcja $C(\mathbf{r}, t)$, z wzoru (1.47), określona jest za pomocą pola $\psi(\mathbf{r}, t)$, tak jak wskazuje wzór (1.54). Tym samym rozważane potencjały spełniają zależność:

$$V'_D = V_D - \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.56)$$

1.3.2 Równania potencjałów

Rozważać będziemy pole elektromagnetyczne w ośrodku liniowym, jednorodnym, izotropowym i stacjonarnym. Rozkłady ładunku ρ_s i gęstości prądu $\mathbf{J}_{s,w}$, występujące w wymienionym obszarze, traktować będziemy jako znane źródła pola.

Z przyjętych definicji wynika, że wektory \mathbf{E} i \mathbf{B} są zależne od potencjałów elektrodynamicznych V_D i \mathbf{A} w sposób określony następującymi równaniami:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad (1.57)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V_D - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.58)$$

Wyprowadzenie rozpoczniemy od prawa Ampère'a-Maxwella:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}_{s,w} + \gamma\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.59)$$

W powyższej zależności symbol $\mathbf{J}_{s,w}$ oznacza wymuszony przez źródła zewnętrzne prąd o znanej wartości. Prąd ten wzbudza pole, które rozważamy. Natomiast składnik $\gamma\mathbf{E}$ wyraża prąd przewodzenia, wywołany przez pole elektryczne, które istnieje w ośrodku przewodzącym.

Korzystając z zależności $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ i $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ oraz związków (1.57) i (1.58), wprowadzamy potencjały do równania (1.59):

$$\frac{1}{\mu} \text{rot}(\text{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{J}_{s,w} + \gamma \left(-\text{grad}V_D - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad}V_D - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (1.60)$$

Mnożąc stronami przez μ i przekształcając dostajemy

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \mu \mathbf{J}_{s,w} - \mu\gamma \operatorname{grad} V_D - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \operatorname{grad} \frac{\partial V_D}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \\ &= \mu \mathbf{J}_{s,w} - \operatorname{grad} \left(\mu\gamma V_D + \mu\epsilon \frac{\partial V_D}{\partial t} \right) - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Do zależności (1.61) zastosujemy następującą tożsamość różniczkową

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (1.62)$$

Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \\ &= \mu \mathbf{J}_{s,w} - \operatorname{grad} \left(\mu\gamma V_D + \mu\epsilon \frac{\partial V_D}{\partial t} \right) - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Przypomnijmy teraz, że definicja magnetycznego potencjału wektorowego nie jest jednoznaczna. W celu uzyskania jednoznaczności potrzebne jest jej uściślenie. Czyni się to poprzez arbitralne ustalenie postaci $\operatorname{div} \mathbf{A}$ ¹, a tym samym określenie składnika potencjalnego pola \mathbf{A} . W rozważanym przypadku przyjmujemy

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = - \left(\mu\gamma V_D + \mu\epsilon \frac{\partial V_D}{\partial t} \right). \quad (1.64)$$

Dzięki temu z równania (1.63) wyeliminowany zostanie potencjał skalarny V_D . Przenosząc wyrazy zawierające potencjał wektorowy na lewą stronę, otrzymujemy poszukiwane równanie:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_{s,w}.} \quad (1.65)$$

Gdy przyjmujemy, że pole znajduje się w ośrodku nieprzewodzącym ($\gamma = 0$), to warunek (1.64), określający dywergencję potencjału wektorowego \mathbf{A} , przyjmie postać:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial V_D}{\partial t}, \quad (1.66)$$

¹Problem jednoznaczności definicji wektorowego potencjału magnetycznego omówiono szczegółowo w paragrafie 4.3.2 na stronie 200 w części pierwszej skryptu.

gdzie $\frac{1}{\gamma^2} = \mu\epsilon$. Wówczas równanie potencjału uprości się:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_{s,w} . \quad (1.67)$$

Wyprowadzenie równania elektrodynamicznego potencjału skalarnego rozpoczniemy od prawa Gaussa:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_s . \quad (1.68)$$

Korzystając z zależności $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ oraz związku (1.58), do równania (1.68) wprowadzimy potencjały:

$$\operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} V_D - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_s}{\epsilon} . \quad (1.69)$$

Po uporządkowaniu dostajemy

$$-\operatorname{div}(\operatorname{grad} V_D) - \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} = \frac{\rho_s}{\epsilon} . \quad (1.70)$$

Stosując zależność (1.66) oraz tożsamość

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V_D) = \nabla^2 V_D , \quad (1.71)$$

możemy równanie (1.70) zapisać następująco:

$$-\nabla^2 V_D - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V_D}{\partial t} \right) = \frac{\rho_s}{\epsilon} . \quad (1.72)$$

Ostatecznie równanie skalarnego potencjału elektrodynamicznego przyjmie kształt wyrażony zależnością:

$$\nabla^2 V_D - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 V_D}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon} . \quad (1.73)$$

1.3.3 Rozwiązanie równań falowych potencjałów

1.3.3.1 Równanie Helmholtza dla transformat

Poszukiwać będziemy rozwiązań równań (1.67) i (1.73), w których niewiadomymi są potencjały elektrodynamiczne V_D i \mathbf{A} , w obszarze nieograniczonym, przy założeniu, że znane są rozkłady przestrzenne i zmienność w czasie źródeł pola, czyli gęstości ładunku $\rho_s(\mathbf{r}, t)$ i gęstości prądu $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$.

Początkowo rozważmy równanie potencjału skalarnego V_D :

$$\nabla^2 V_D(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V_D(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho_s(\mathbf{r}, t)}{\epsilon}. \quad (1.74)$$

Symbolem $V_D(\mathbf{r}, j\omega)$ oznaczymy transformatę Fouriera poszukiwanej funkcji $V_D(\mathbf{r}, t)$. Z definicji przekształcenia wynika, że

$$V_D(\mathbf{r}, j\omega) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{F}\{V_D(\mathbf{r}, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} V_D(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.75)$$

oraz

$$V_D(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{F}^{-1}\{V_D(\mathbf{r}, j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_D(\mathbf{r}, j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.76)$$

Analogicznie, przez $\rho_s(\mathbf{r}, j\omega)$ i $\rho_s(\mathbf{r}, t)$ oznaczymy parę transformat gęstości ładunku elektrycznego. Zachodzi wówczas

$$\rho_s(\mathbf{r}, j\omega) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{F}\{\rho_s(\mathbf{r}, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.77)$$

$$\rho_s(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{F}^{-1}\{\rho_s(\mathbf{r}, j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_s(\mathbf{r}, j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.78)$$

Dokonyamy obecnie transformaty Fouriera obu stron równania (1.74). Stosując twierdzenie o transformacie pochodnej, wyrażone wzorem:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 V_D(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}\right\} = (j\omega)^2 V_D(\mathbf{r}, j\omega), \quad (1.79)$$

otrzymamy

$$\nabla^2 V_D(\mathbf{r}, j\omega) - \frac{1}{v^2} (j\omega)^2 V_D(\mathbf{r}, j\omega) = -\frac{\rho_s(\mathbf{r}, j\omega)}{\epsilon}. \quad (1.80)$$

Uwzględniając, że $j^2 = -1$ oraz oznaczając

$$-\frac{1}{v^2} (j\omega)^2 = -j^2 \frac{\omega^2}{v^2} = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \Gamma^2, \quad (1.81)$$

ostatecznie otrzymujemy

$$\nabla^2 V_D(\mathbf{r}, j\omega) + \Gamma^2 V_D(\mathbf{r}, j\omega) = -\frac{\rho_s(\mathbf{r}, j\omega)}{\epsilon}. \quad (1.82)$$

Wyprowadzone równanie, które spełnia transformata Fouriera skalarnego potencjału elektrodynamicznego $V_D(\mathbf{r}, j\omega)$, w matematyce nazywa się *niejednorodnym równaniem Helmholtza*. Do jego rozwiązania, czyli do wyznaczenia $V_D(\mathbf{r}, j\omega)$, zastosujemy metodę funkcji Greena. W dalszym ciągu wykładu przedstawione zostaną podstawowe pojęcia i koncepcja wymienionej metody.

1.3.3.2 Metoda funkcji Greena

Rozważymy klasę równań różniczkowych, które można ogólnie zapisać w postaci:

$$L(x)u(x) = s(x), \quad (1.83)$$

przy czym x jest zmienną niezależną, $u(x)$ oznacza niewiadomą funkcję, $s(x)$ jest funkcją źródłową, a $L(x)$ jest symbolem liniowego operatora różniczkowego. W rozpatrywanym przez nas przypadku chodzi o operator występujący w równaniu Helmholtza, wyrażony zależnością:

$$\nabla^2(*) + \Gamma^2(*). \quad (1.84)$$

W podanym wzorze symbol $(*)$ oznacza miejsce, w które należy wstawić funkcję poddawaną działaniu operatora. Dla uproszczenia rozumowania analizować będziemy zagadnienie jednowymiarowe, co oznacza, że $u(x)$ jest funkcją jednej zmiennej.

Rozumując formalnie stwierdzamy, że funkcję $u(x)$ można wyznaczyć działając na obie strony równania (1.83) operatorem $L^{-1}(x)$ odwrotnym do $L(x)$. Wykonując wymienioną operację, otrzymamy

$$L^{-1}(x) L(x) u(x) = L^{-1}(x) s(x). \quad (1.85)$$

Jak wskazuje wyrażenie (1.84), operator $L(x)$ jest operatorem różniczkowym, dlatego należy spodziewać się, że $L^{-1}(x)$ będzie operatorem całkowym. Oczekujemy również, by spełniona była zależność:

$$L^{-1}(x) L(x) u(x) = 1 u(x), \quad (1.86)$$

co oznacza, że operator $L^{-1}(x) L(x) = 1$ jest operatorem jednostkowym. Uwzględniając ten fakt, równanie (1.85) możemy zapisać w postaci zależności:

$$u(x) = L^{-1}(x) s(x). \quad (1.87)$$

Otrzymany wynik wskazuje, że wyznaczenie niewiadomej funkcji $u(x)$ sprowadzone zostało do wyznaczenia operatora $L^{-1}(x)$ i zastosowania go do funkcji źródłowej $s(x)$.

Wprowadzimy obecnie definicję funkcji związanej w szczególny sposób z rozważnym operatorem.

Definicja 1.2 *Funkcją Greena*, operatora różniczkowego $L(x)$, nazywamy funkcję $G(x, x')$ spełniającą równanie:

$$L(x) G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (1.88)$$

przy czym x jest zmienną występującą w rozpatrywanym operatorze różniczkowym L , symbol $\delta(x)$ oznacza impuls Diraca, a x' jest punktem źródłowym, w którym umieszczony został impuls, stanowiący funkcję wymuszającą równania (1.88).

Wykażemy obecnie, że operator, oznaczony symbolem $L^{-1}(x)$ i działający na funkcję $s(x)$, wyrażony wzorem:

$$L^{-1}(x)s(x) = \int G(x, x') s(x') dx', \quad (1.89)$$

posiada właściwości operatora odwrotnego do $L(x)$, gdy $G(x, x')$ jest odpowiadającą mu funkcją Greena.

Jeżeli, wprowadzony zależnością (1.89), operator odwrotny do $L(x)$ będzie spełniał swoje zadanie, to funkcję $u(x)$, która jest rozwiązaniem równania (1.83), możemy — na podstawie (1.87) i (1.89) — wyznaczyć z wzoru:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') s(x') dx'. \quad (1.90)$$

Sprawdzimy obecnie czy funkcja $u(x)$, wyrażona wzorem (1.90), spełnia równanie (1.83). W tym celu rozważymy lewą stronę wspomnianego równania i dokonamy podstawienia wynikającego z wymienionej zależności:

$$L(x) u(x) = L(x) \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') s(x') dx'. \quad (1.91)$$

W przedstawionym powyżej wzorze całkowanie wykonywane jest względem zmiennej x' , a różniczkowanie (określone postacią operatora $L(x)$) względem drugiej

zmiennej x . Możliwe jest więc przestawienie kolejności wykonywania obu operacji:

$$L(x) u(x) = \underbrace{L(x) \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') s(x') dx'}_{\text{różniczkowanie}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{L(x) G(x, x') s(x')}_{\text{różniczkowanie}} dx' . \quad (1.92)$$

Uwzględniając dodatkowo zależność (1.88), definiującą funkcję Greena oraz właściwość filtrującą impulsu Diraca, wyrażoną zależnością:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') s(x') dx' = s(x) , \quad (1.93)$$

na podstawie (1.91) dostajemy

$$L(x) u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{L(x) G(x, x')}_{\delta(x-x')} s(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') s(x') dx' = s(x) . \quad (1.94)$$

Wykazaliśmy, że lewa strona równania (1.83), po podstawieniu do niego funkcji $u(x)$, wyrażonej wzorem (1.90), jest równa $s(x)$ i jest taka sama jak prawa strona rozważanego równania. Zatem wnioskujemy, że wzór (1.90) przedstawia rozwiązanie równania (1.83).

Wniosek 1.3 Rozwiązanie $u(x)$ równania:

$$L(x) u(x) = s(x) , \quad (1.95)$$

w którym $L(x)$ jest symbolem liniowego operatora różniczkowego, ma postać:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x') s(x') dx' , \quad (1.96)$$

przy czym $G(x, x')$ jest funkcją Greena operatora $L(x)$.

Z przedstawionych rozważań wynika, że rozwiązanie równania różniczkowego metodą funkcji Greena składa się z dwóch etapów. W pierwszym wyznaczamy

funkcję Greena dla operatora występującego w rozwiązywanym równaniu (czyli rozwiązanie dla wymuszenia impulsowego), a w drugim ustalamy rozwiązanie dla aktualnej postaci funkcji wymuszającej, stosując wzór (1.96).

Omówione postępowanie może być również stosowane do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych, w których niewiadome funkcje zależą od wielu zmiennych. Tak więc rozwiązanie równania:

$$L(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}), \quad (1.97)$$

gdzie \mathbf{r} jest wektorem wskazującym punkty w przestrzeni trójwymiarowej, będzie miało postać:

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_{\mathcal{V}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_z) s(\mathbf{r}_z) dv, \quad (1.98)$$

przy czym położenie elementu objętości dv jest wskazywane wektorem \mathbf{r}_z , a \mathcal{V} oznacza obszar, w którym wyznaczamy rozwiązanie (w szczególności może to być obszar nieograniczony). Rysunek 1.1 wyjaśnia dokładnie wzajemne zależności między wektorami \mathbf{r} , \mathbf{r}_Δ i \mathbf{r}_z .

1.3.3.3 Potencjały opóźnione

Po dygresji matematycznej wracamy do poszukiwania rozwiązania równania falowego potencjału skalarnego. Wymienione równanie sprowadzone zostało do niejednorodnego równania Helmholtza (1.82), w którym niewiadomą jest transformata Fouriera poszukiwanej funkcji. W pierwszym etapie jego rozwiązania wyznaczyć będziemy funkcję Greena $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_z, j\omega)$ operatora równania (1.82), który ma postać, określoną zależnością:

$$L(\mathbf{r})(*) = \nabla^2(*) + \Gamma^2(*), \quad \text{gdzie} \quad \Gamma = \frac{\omega}{v}. \quad (1.99)$$

Zgodnie z definicją (1.2), podaną na stronie 21, funkcja $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_z, j\omega)$ spełniać będzie równanie:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_z, j\omega) + \Gamma^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_z, j\omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_z). \quad (1.100)$$

Zauważmy, że funkcja wymuszająca, występująca w rozważanym równaniu, czyli impuls Diraca $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_z)$, wykazuje symetrię sferyczną względem punktu wskazywanego wektorem \mathbf{r}_z . Oznacza to, że — ponieważ poszukujemy rozwiązania w obszarze nieograniczonym — wszystkie punkty obszaru (wskazywane wektorem \mathbf{r}) jednakowo odległe od punktu źródłowego (wskazywanego wektorem \mathbf{r}_z) znajdują się w równoważnym położeniu względem źródła. Wobec tego, wartości