Spis treści

Wstęp **5**

1 Przestrzeń z miarą **7**

2 Miara zewnętrzna **15**

3 Miara Lebesgue'a w $\mathbb{R}^k$ **21**

4 Zbiory niemierzalne **31**

5 Funkcje mierzalne **37**

6 Całka funkcji mierzalnej nieujemnej **45**

7 Całka Lebesgue'a i jej własności **53**

8 Przechodzenie do granicy **61**

9 Związek całki Riemanna **69**

10 Zasada Cavalieriego **75**

11 Zastosowania zasady Cavalieriego **81**

12 Twierdzenie Fubiniego **89**

13 Dyfeomorfizmy **97**

14 Ogólne twierdzenia Fubiniego **107**

Wskazówki bibliograficzne **111**

Skorowidz **113**

Spis literatury **117**

Wstęp

Teoria miary jest istotnym ogniwem współczesnej matematyki. Gdy miara przestrzeni jest jednostkowa, mamy do czynienia z prawdopodobieństwem, któremu przypisana jest osobna teoria, ważna z punktu widzenia zastosowań. Pojęcie całki pochodzące od Lebesgue'a, ze względu na swą uniwersalność, ogólność i użyteczne własności, od dawna zalicza się do kanonu analizy matematycznej.

Przedstawiony tu podstawowy kurs teorii miary i całki Lebesgue'a stanowi część nauczanej na studiach matematycznych – analizy rzeczywistej. Pomyślany został jako cykl 14 wykładów, które można przeprowadzić w ciągu jednego semestru. Pewne nieliczne dowody zostały pominięte, inne – tylko naszkicowane z odesłaniem Czytelnika do literatury. W skrypcie zamieszczono przykłady i ćwiczenia nawiązujące do wyłożonej teorii.

Z oczywistych względów skrypt nie jest oryginalnym materiałem dydaktycznym – jego treść została opracowana w dużej mierze na podstawie trzech bardzo dobrych i powszechnie sprawdzonych podręczników analizy w języku polskim, autorstwa odpowiednio Kołodzieja [14], Birkholca [4] i Rudnickiego [23], a także (w niewielkim stopniu) z wykorzystaniem książek [9], [22] i [2]. Wykłady te były kilkakrotnie przetestowane przeze mnie na zajęciach dla studentów matematyki Wydziału FTIMS Politechniki Łódzkiej. Spis literatury zawiera monografie i podręczniki, dzięki którym można poszerzyć wiedzę z zakresu teorii miary i całki w różnym zakresie i ujęciu. Aby to ułatwić, dodałem wskazówki bibliograficzne.

Chciałbym serdecznie podziękować kolegom i koleżance z mojej Uczelni, którzy przyczynili się do powstania skryptu. Jestem wielce wdzięczny **profesorowi Jackowi Jachymskiemu** za udostępnienie notatek z tej tematyki oraz za uważną korektę tekstu i konstruktywną krytykę zawartą w recenzji. Dziękuję również **doktorowi Wojciechowi Wojdowskiemu** za pomysł rozpowszechnienia wykładów w formie drukowanej oraz absolwentce studiów licencjackich matematyki PŁ, **Alicji Kierus**, która na podstawie mojego rękopisu niezwykle starannie przygotowała większość wykładów w wersji elektronicznej, wykonując żmudną czasochłonną pracę. Bez tego końcowy efekt nie byłby osiągnięty.

Stosujemy następujące oznaczenia: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych, $\mathrm{card}(A)$ – moc zbioru A.

Rozdział 1

Przestrzeń z miarą

Miara Jordana na płaszczyźnie (i ogólnie w przestrzeni $\mathbb{R}^k$) jest precyzyjnym pojęciem pola powierzchni (objętości wielowymiarowej) zbioru. Przypomnijmy, że zbiór jest mierzalny w sensie Jordana wtedy i tylko wtedy, gdy jego miara wewnętrza Jordana jest równa mierze zewnętrznej Jordana (por. [1], [17], [19]). Jednakże miara Jordana mierzy zbyt wąską klasę zbiorów. Przykładem zbioru niemierzalnego w sensie Jordana na płaszczyźnie jest „kwadrat wymierny" $A = (\mathbb{Q} \cap [0,1])^2$. Jego miara wewnętrzna Jordana jest 0, zaś miara zewnętrzna wynosi 1. Miara zbioru A „powinna" być równa 0, gdyż jest to zbiór przeliczalny. Istotnie, sumując miary zerowe zbiorów jednoelementowych złożonych z poszczególnych punktów tego zbioru, powinniśmy otrzymać „łączną miarę" równą 0. Jest to niewykonalne, bo miara Jordana nie ma własności

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n), \tag{1.1}$$

gdzie zbiory A_n są mierzalne i parami rozłączne. Własność (1.1), zwana *przeliczalną addytywnością miary* przysługuje pojęciu ogólniejszemu niż miara Jordana, pochodzącemu od Lebesgue'a.

Wiemy, że miara Jordana ma ścisły związek z całką Riemanna (por. np. [17]), której wartość dla funkcji całkowalnej nieujemnej na przedziale zwartym jest polem powierzchni (miarą Jordana) odpowiedniego zbioru położonego między wykresem funkcji i osią OX (podwykresu). Dla miary Lebesgue'a, którą poznamy, analogiczną rolę pełni całka Lebesgue'a pozwalająca całkować szeroką klasę funkcji na zbiorach pochodzących z obszernej klasy. Idea całki Lebesgue'a jest inna niż koncepcja całki Riemanna. Całka Lebesgue'a jest ogólniejsza niż całka Riemanna i ma wiele zalet, na przykład działają dla niej twierdzenia o przechodzeniu do granicy mniej restrykcyjne niż znane twierdzenie dla całki Riemanna zakładające zbieżność jednostajną ciągu funkcji podcałkowych (por. np. [22]).

Na początek poznamy pojęcia σ-ciała i miary na σ-ciele. W przestrzeni metrycznej określimy σ-ciało zbiorów borelowskich. Omówimy też własności zbiorów miary zero i pojęcie miary zupełnej.

Definicja 1.1. Niech X będzie zbiorem. Rodzina $\mathcal{S}$ podzbiorów zbioru X nazywa się *σ-ciałem*, gdy:

(1) $\emptyset \in \mathcal{S}$;

(2) jeśli $A \in \mathcal{S}$, to $X \setminus A \in \mathcal{S}$;

(3) jeśli $A_n \in \mathcal{S}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$.

Uwaga 1.1. Jeśli warunek (3) zastąpić przez warunek słabszy

(3′) jeśli $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$, to $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}$,

to rodzina $\mathcal{S}$ spełniająca (1), (2), (3′) nazywa się *ciałem*. Warunek (3′) nazywa się *skończoną addytywnością*, zaś (3) – *przeliczalną addytywnością* (*σ-addytywnością*).

Uwaga 1.2. Dowodzi się, że rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Jordana w $\mathbb{R}^k$ jest ciałem, ale nie jest σ-ciałem.

Przykłady.

1.) Rodzina $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X jest σ-ciałem.

2.) Niech $A \subset X$. Rodziny $\{\emptyset, X\}$, $\{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ są σ-ciałami.

3.) Niech X będzie zbiorem nieskończonym i niech $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę tych podzbiorów zbioru X, które są skończone lub ich dopełnienia są skończone. Wtedy $\mathcal{S}$ jest ciałem, lecz nie jest σ-ciałem.

4.) Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym i niech $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę tych podzbiorów zbioru X, które są przeliczalne lub których dopełnienia są przeliczalne. Wtedy $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem.

5.) Niech $X = [0, 1)$ i niech rodzina $\mathcal{S}$ składa się ze skończonych sum przedziałów postaci $[a, b)$ dla $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ i zbioru pustego. Wtedy $\mathcal{S}$ jest ciałem, lecz nie jest σ-ciałem.

Twierdzenie 1.1 (własności σ-ciała)**.** *Niech $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie σ-ciałem. Zachodzą następujące własności:*

1.) $X \in \mathcal{S}$;

2.) jeśli $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, to $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$;

3.) jeśli $A_n \in \mathcal{S}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{S}$;

4.) jeśli $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, to $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$;

5.) jeśli $A, B \in \mathcal{S}$, to $A \setminus B \in \mathcal{S}$.

Dowód. Ad 1.) Mamy $X = X \setminus \emptyset \in \mathcal{S}$, bo $\emptyset \in \mathcal{S}$.

Ad 3.) Mamy $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n)) \in \mathcal{S}$, bo wystarczy zastosować definicję 1.1, warunki (1) i (2).

Dowody pozostałych własności polecamy jako ćwiczenie. □

Twierdzenie 1.1 mówi o tym, że σ-ciało jest rodziną zbiorów zamkniętą ze względu na skończone i przeliczalne operacje teoriomnogościowe. Podobnie uzasadnia się, że ciało jest rodziną zbiorów zamkniętą względem skończonych operacji teoriomnogościowych.

Twierdzenie 1.2. *Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ będzie niepustą rodziną. Wówczas istnieje najmniejsze (w sensie inkluzji) σ-ciało $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(X)$ zawierające rodzinę $\mathcal{F}$.*

Dowód. Niech $\{\mathcal{S}_t \colon t \in T\}$ będzie rodziną wszystkich σ-ciał zawierających rodzinę $\mathcal{F}$ i zawartych w $\mathcal{P}(X)$ – jest to rodzina niepusta, bo jednym z takich σ-ciał jest $\mathcal{P}(X)$. Połóżmy

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap_{t\in T} \mathcal{S}_t.$$

Wtedy $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(X)$ oraz $\sigma(\mathcal{F})$ jest σ-ciałem (uzasadnić!). Jeśli $\mathcal{S}_*$ jest pewnym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{F}$, to $\mathcal{S}_* = \mathcal{S}_t$ dla pewnego $t \in T$. Zatem

$\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{S}_*$. Oznacza to, że $\sigma(\mathcal{F})$ jest najmniejszym σ-ciałem zawierającym $\mathcal{F}$. $\square$

Uwaga 1.3. σ-ciało $\sigma(\mathcal{F})$ nazywa się σ-ciałem *generowanym* przez rodzinę $\mathcal{F}$.

Definicja 1.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. *Zbiorem borelowskim* w tej przestrzeni nazywamy każdy zbiór należący do σ-ciała $\sigma(\mathcal{T})$, gdzie $\mathcal{T}$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni X. Rodzinę wszystkich podzbiorów borelowskich przestrzeni X oznaczać będziemy przez $\mathcal{B}(X)$.

Uwaga 1.4. Z definicji σ-ciała $\mathcal{B}(X)$ wynika, że oprócz zbiorów otwartych w X należą do niego wszystkie zbiory domknięte w X (jako dopełnienia zbiorów otwartych), a także zbiory postaci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, gdzie F_n są domknięte (zbiory takiej postaci nazywają się zbiorami typu *F-sigma* (F_σ)) jak również zbiory postaci $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, gdzie G_n są otwarte (zwane zbiorami typu *G-delta* (G_δ)). W podobny sposób określamy kolejne typy zbiorów borelowskich $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$ oraz G_δ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}, \ldots$.

Definicja 1.3. Niech $\mathcal{S}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru X. Funkcję $\mu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą*, gdy

1^0 $\mu(\emptyset) = 0$;

2^0 jeśli $A_n \in \mathcal{S}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (przeliczalna addytywność).

Trójkę $(X, \mathcal{S}, \mu)$, gdzie μ jest miarą na σ-ciele $\mathcal{S}$ nazywa się *przestrzenią z miarą*.

Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą.

- Jeśli $A \in \mathcal{S}$ i $\mu(A) = 0$, to mówimy, że A jest *zbiorem miary zero*.
- Jeśli $A \in \mathcal{S}$ i $\mu(A) < \infty$, to mówimy, że A jest *zbiorem miary skończonej*.
- Jeśli $\mu(X) < \infty$, to mówimy, że miara μ jest *skończona*.
- Jeśli $\mu(X) = 1$, to mówimy, że miara μ jest *unormowana (probabilistyczna)*.
- Jeśli istnieje ciąg $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $A_n \in \mathcal{S}$ i $\mu(A_n) < \infty$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, to mówimy, że miara μ jest *σ-skończona*.

Przykłady. Podamy kilka przykładów przestrzeni z miarą.

1.) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, gdzie $\mu(A) = 0$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{P}(X)$ (*miara zerowa*).

2.) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, gdzie dla dowolnego $A \in \mathcal{P}(X)$ definiujemy

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{gdy card}(A) < \infty \\ \infty & \text{gdy card}(A) = \infty. \end{cases}$$

Wtedy μ jest tzw. *miarą liczącą.*

3.) $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, gdzie miarę μ określamy tak, że ustalamy $x_0 \in X$ i wtedy dla dowolnego $A \in \mathcal{P}(X)$ definiujemy

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_0 \notin A \\ 1 & \text{gdy } x_0 \in A. \end{cases}$$

4.) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, gdzie miarę μ określamy następująco: niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym o wyrazach nieujemnych, wtedy $\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$ dla $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Twierdzenie 1.3 (własności miary). *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Wówczas zachodzą następujące własności:*

(1)) *jeśli $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ (skończona addytywność);*

(2) *μ jest niemalejącą funkcją zbioru, tzn. jeśli $A, B \in \mathcal{S}$ i $A \subset B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$;*

(3) *jeśli $A, B \in \mathcal{S}$, $A \subset B$ i $\mu(A) < \infty$, to $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

(4) *jeśli $A_n \in \mathcal{S}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (przeliczalna podaddytywność);*

(4′) *jeśli $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, to $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$;*

(5) *dla dowolnego* wstępującego *ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiorów ($A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$) należących do $\mathcal{S}$ mamy $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$;*

(6) *dla dowolnego* zstępującego *ciągu* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zbiorów* $(A_{n+1} \subset A_n,\ n \in \mathbb{N})$ *należących do* $\mathcal{S}$ *mamy* $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, *o ile* $\mu(A_1) < \infty$.

Dowód. Ad (1). Wystarczy położyć $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ i zastosować przeliczalną addytywność miary.

Ad (2). Mamy $B = A \cup (B \setminus A)$, $B \setminus A \in \mathcal{S}$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, więc korzystając z (1), otrzymujemy $\mu(A) \leqslant \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$.

Ad (3). Jak w (2) mamy $\mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$ i jeśli $\mu(A) < \infty$, to $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ i odejmowanie po prawej stronie jest wykonalne.

Ad (4). Definiujemy ciąg $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wzorami $B_1 = A_1$ oraz $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ dla $n \geqslant 2$. Wtedy $B_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$ (wykazać!). Stąd wynika, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ponadto $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$. Zatem korzystając z (2) i inkluzji $B_i \subset A_i$, mamy

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Ad (4′). Połóżmy w (4) $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

Ad (5). Zaczynamy podobnie jak w (4). Definiujemy zbiory B_n, $n \in \mathbb{N}$, następująco: $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Wtedy $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ wynosi

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Ad (6). Polecamy jako ćwiczenie. Wskazówka: określić $D_n = A_1 \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$; zauważyć, że ciąg $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępujący, a następnie zastosować (5) i (3). □

Ćwiczenie 1.1. (a) Uzasadnić, że w twierdzeniu 1.3 we własności (6) wystarczy zakładać, że $\mu(A_{n_0}) < \infty$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$.

(b) Pokazać, że bez założenia o skończoności miary odpowiednich zbiorów, prawa strona równości (3) może być nieokreślona, a własność (6) może nie zachodzić.

Twierdzenie 1.4 (własności zbiorów miary zero). *Niech* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *będzie przestrzenią z miarą. Wtedy zachodzą własności:*

1.) jeśli $A_n \in \mathcal{S}$ *i* $\mu(A_n) = 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$, *to* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$;

2.) jeśli $A, B \in \mathcal{S}$, $\mu(A) = 0$, $B \subset A$, *to* $\mu(B) = 0$;

3.) jeśli $A, B \in \mathcal{S}$ *i* $\mu(B) = 0$, *to* $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ *i* $\mu(A \setminus B) = \mu(A)$.

Dowód – ćwiczenie. $\square$

Definicja 1.4. Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Mówimy, że miara μ jest *zupełna*, gdy

$$(\forall A \in \mathcal{S})(\mu(A) = 0 \Rightarrow (\forall B \subset A)\ B \in \mathcal{S})$$

(tzn. gdy podzbiór dowolnego zbioru miary zero należy do σ-ciała).

Twierdzenie 1.5 (o rozszerzaniu miary do miary zupełnej). *Niech* $(X, \mathcal{S}, \mu)$ *będzie przestrzenią z miarą. Niech* $\widetilde{\mathcal{S}}$ *oznacza rodzinę wszystkich zbiorów postaci* $A \cup B$, *gdzie* $A \in \mathcal{S}$ *oraz* B *jest podzbiorem pewnego zbioru* $C \in \mathcal{S}$ *takiego, że* $\mu(C) = 0$. *Definiujemy* $\widetilde{\mu}\colon \widetilde{\mathcal{S}} \to [0, \infty]$ *wzorem* $\widetilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$, *gdzie* $A \cup B \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *oraz* A, B *mają postać opisaną wyżej. Wtedy:*

1^0 $\widetilde{\mathcal{S}}$ *jest* σ*-ciałem takim, że* $\widetilde{\mathcal{S}} \supset \mathcal{S}$;

2^0 $\widetilde{\mu}$ *jest funkcją poprawnie zdefiniowaną, tzn. jeśli* $A \cup B = A' \cup B' \in \widetilde{\mathcal{S}}$ *oraz* A, B, A', B' *mają postać opisaną wyżej, to* $\widetilde{\mu}(A \cup B) = \widetilde{\mu}(A' \cup B')$;

3^0 $\widetilde{\mu}$ *jest miarą zupełną na* $\widetilde{\mathcal{S}}$;

4^0 $\widetilde{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$.

Dowód – ćwiczenie. $\square$