

Spis treści

1. Analiza dwukierunkowego stanu naprężenia	7
1.1. Wprowadzenie	7
1.2. Zadania przykładowe	9
1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	18
2. Wytrzymałość złożona	21
2.1. Wprowadzenie	21
2.2. Przykłady obliczeniowe elementów konstrukcji w złożonym stanie obciążenia	23
2.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	50
3. Zbiorniki cienkościenne	55
3.1. Wprowadzenie	55
3.2. Przykłady obliczeń naprężeń i odkształceń w zbiornikach cienkościennych ..	57
3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	68
4. Wyboczenie prętów ściskanych osiowo	71
4.1. Wprowadzenie	71
4.2. Przykłady obliczeń stateczności prętów ściskanych	75
4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	90
5. Metody energetyczne	93
5.1. Wprowadzenie	93
5.2. Przykłady obliczeń	96
5.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	134
6. Zagadnienia specjalne	144
6.1. Czyste zginanie prętów silnie zakrzywionych	144
6.2. Środek sił poprzecznych	150
6.3. Naprężenia i odkształcenia w rurach grubościennych	155
6.4. Płyty kołowe obciążone osiowo-symetrycznie	160
6.5. Nośność graniczna	167
6.6. Obciążenia udarowe	186

Słowo od autorów

Druga część podręcznika „Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów” jest kontynuacją części pierwszej wydanej przez Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej pod koniec 2008 roku, w której zamieszczono zadania dotyczące prostych przypadków wytrzymałości materiałów (rozciąganie, ściskanie, zginanie i skręcanie).

Część druga podręcznika przeznaczona jest dla studentów kierunków konstrukcyjnych i zawiera zadania z wytrzymałości złożonej, zbiorników cienkościennych, wybożenia prętów, konstrukcji prętowych statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych (belek, ram, łuków), płyt kołowych oraz innych wybranych zagadnień wytrzymałości materiałów.

Rozdziały poprzedzone są krótkim wprowadzeniem zawierającym podstawowe wzory i definicje oraz metody i metodykę rozwiązywania zadań. Wiele zadań zostało rozwiązanych ze szczegółowym opisem rozwiązania.

Autorzy uważają, że najefektywniejszą metodą nauczania się poprawnego rozwiązywania zadań przez studentów jest samodzielne ich rozwiązanie. Dlatego też, podobnie jak w części pierwszej podręcznika, sporo zadań przeznaczonych jest do samodzielnego rozwiązania. Dla sprawdzenia poprawności rozwiązania tych zadań podano końcowe wyniki rozwiązania.

1. ANALIZA DWUKIERUNKOWEGO STANU NAPRĘŻENIA

1.1. Wprowadzenie

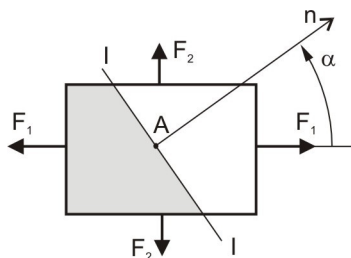
W dowolnym punkcie obciążonego ciała występują trzy wzajemnie prostopadłe naprężenia główne σ_1 , σ_2 , σ_3 , działające w kierunkach głównych 1, 2 i 3. Przyjmujemy, że zawsze $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Naprężenia główne są to naprężenia w przekrojach, w których nie ma naprężeń stycznych. Naprężenia główne, w odpowiednich płaszczyznach wzajemnie do siebie prostopadłych, osiągają wartości ekstremalne.

W przypadku, gdy jedno z naprężeń głównych jest równe zero, wówczas mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia.

Z liniowym (jednokierunkowym) stanem naprężenia mamy do czynienia wtedy, gdy jedno z naprężeń głównych jest różne od zera, a dwa pozostałe równe zero – występuje wówczas ścisnienie lub rozciąganie.

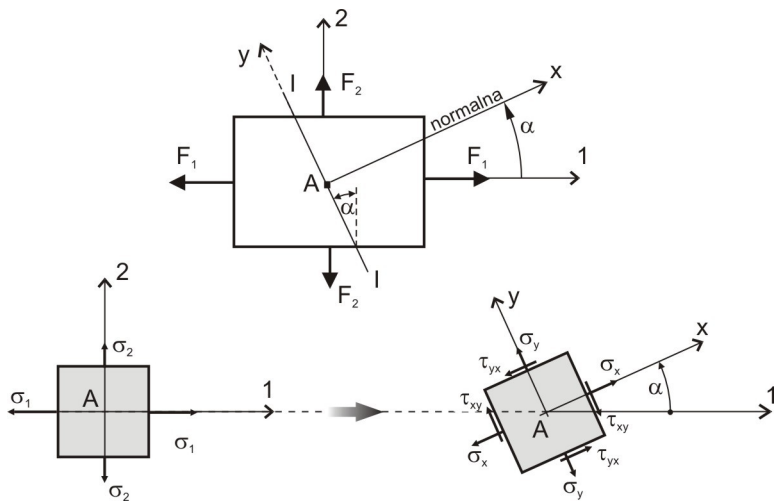
Celem analizy jest określenie stanu naprężenia występującego w dowolnym punkcie ciała znajdującego się w danym przekroju, którego normalna tworzy z kierunkiem naprężeń głównych σ_1 dowolny kąt α . Przykładem może być przedstawiona na rys. 1.1 płyta prostokątna rozciągana w dwu prostopadłych kierunkach, dla której chcemy wyznaczyć stan naprężeń w punkcie A w przekroju I-I.



Rys. 1.1

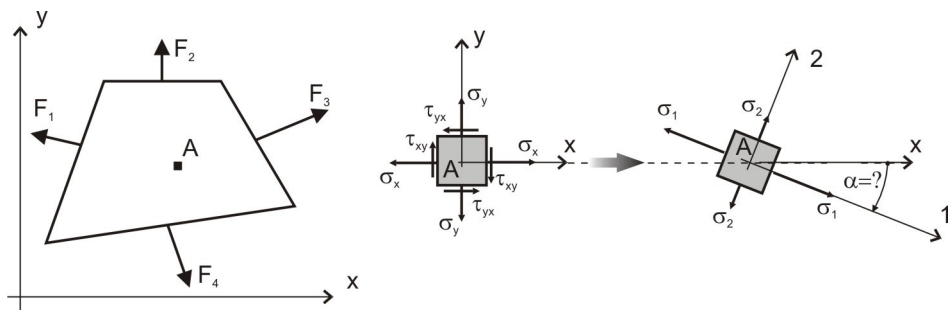
Dla różnych analizowanych przypadków rozpatruje się dwa warianty analizy:

- znane są w konkretnym punkcie ciała wartości i kierunki naprężeń głównych σ_1 , σ_2 , a szukamy stanów naprężeń w innych przekrojach prostopadłych do płaszczyzny osi głównych 1 i 2 przechodzących przez ten punkt (rys. 1.2);



Rys. 1.2

- znane są stany naprężeń (σ_x , σ_y , τ_{xy}) w dwóch prostopadłych do siebie przekrojach przechodzących przez interesujący nas punkt, a celem zadania jest wyznaczenie wartości naprężeń głównych σ_1 , σ_2 oraz kierunków ich działania (rys. 1.3).

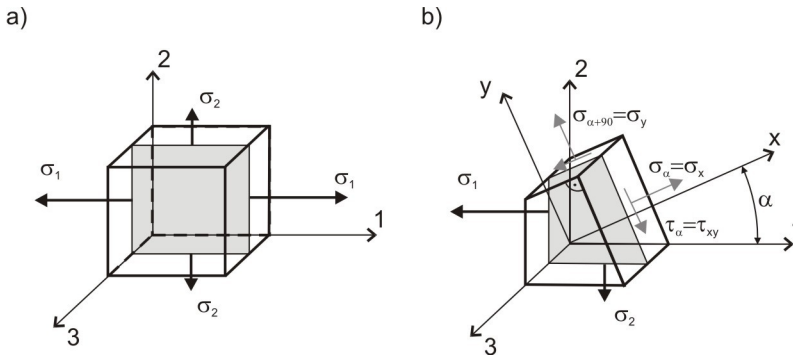


Rys. 1.3

Na przykładach szczegółowych omówione zostaną rozwiązania zagadnień metodą analityczną oraz wykresną (koło Mohra).

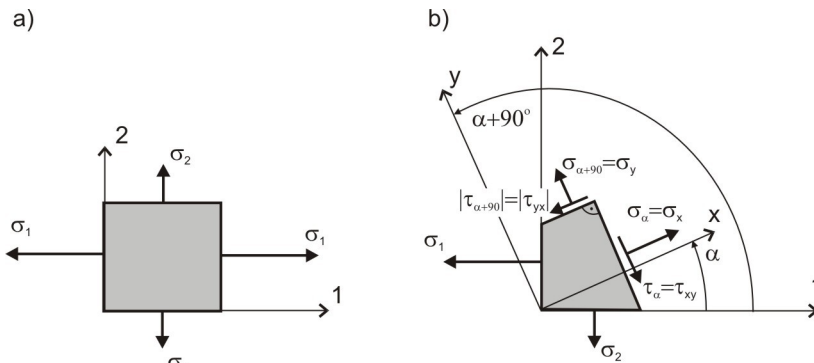
1.2. Zadania przykładowe

Zadanie 1.1. Kostka sześcienna obciążona jest naprężeniami głównymi: $\sigma_1 = 130 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$ i $\sigma_3 = 0$ (rys. 1.4). Wyznaczyć stan naprężeń w przekrojach pod kątami $\alpha = 30^\circ$ oraz $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$ odmierzanymi w kierunku dodatnim (trygonometrycznym) od płaszczyzny prostopadłej do osi głównej 1.



Rys. 1.4

Rozwiązanie. Kostka sześcienna obciążona jest jedynie w płaszczyźnie 1-2, mamy więc do czynienia z płaskim stanem naprężenia (rys. 1.4 i 1.5). W przekroju pod kątem $\alpha = 30^\circ$ występują dwie składowe istniejącego tam stanu naprężenia: składowa normalna σ_α , którą oznacza się często jako σ_x oraz składowa styczna τ_α , oznaczana również jako τ_{xy} .



Rys. 1.5

Naprężenia te określone są wzorami:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\alpha) = \frac{130 + 50}{2} + \frac{130 - 50}{2} \cos(2 \cdot 30) = 110 \text{ MPa},$$

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha) = \frac{130 - 50}{2} \sin(2 \cdot 30) = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 35 \text{ MPa}.$$

W przekroju prostokątnym, tzn. w przekroju pod kątem $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$, naprężenia wynoszą:

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_y = \frac{130+50}{2} + \frac{130-50}{2} \cos(2 \cdot 120) = 70 \text{ MPa},$$

$$\tau_{\alpha+90} = \tau_{yx} = \frac{130-50}{2} \sin(2 \cdot 120) = -40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -35 \text{ MPa}.$$

Jak widać z powyższych obliczeń pomiędzy naprężeniami stycznymi w dwu prostokątnych przekrojach istnieje następująca zależność:

$$\tau_{\alpha+90} = -\tau_{\alpha},$$

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy}.$$

W przekrojach wzajemnie prostokątnych naprężenia styczne są co do wartości bezwzględnej jednakowe, natomiast ich zwroty są takie, że każda para naprężeń chce obrócić myślowo wydzielony element ciała w przeciwną stronę, dzięki czemu występuje równowaga elementu.

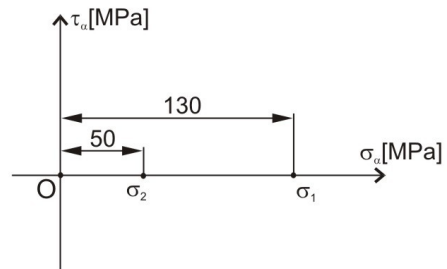
Powyżej przedstawiona została metoda analityczna wyznaczania stanu naprężeń w przekroju prostokątnym do płaszczyzny wyznaczonej przez osie 1 i 2. Tego typu analizę można również wykonać metodą wykreślną, za pomocą tzw. koła Mohra. Dalej na kolejnych rysunkach (rys. 1.6 do 1.11) przedstawiony jest sposób sporządzania koła Mohra.

- wybieramy prostokątny układ współrzędnych $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$: oś odciętych σ_α [MPa], oś rzędnych τ_α [MPa]



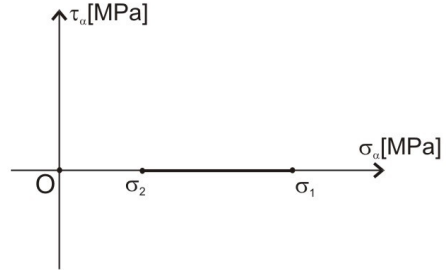
Rys. 1.6

- na osi odciętych wyznaczamy punkty o wartościach $\sigma_1 = 130$ MPa oraz $\sigma_2 = 50$ MPa



Rys. 1.7

- odcinek $\sigma_1 - \sigma_2 = 80$ MPa jest średnicą koła Mohra

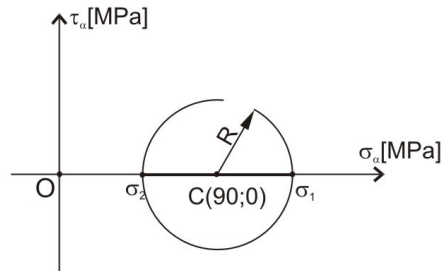


Rys. 1.8

- ze środka tego odcinka o współrzędnych $(90;0)$ zakreślamy promieniem R

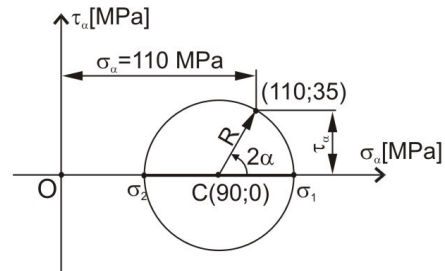
$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{130 - 50}{2} = 40 \text{ MPa}$$

okrąg, otrzymując koło Mohra



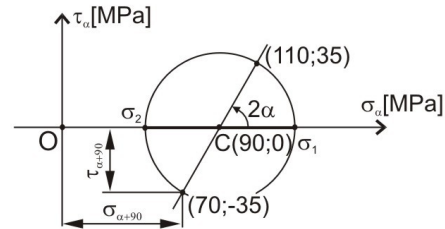
Rys. 1.9

- wartości naprężeń σ_α , τ_α występujące w przekroju określonym kątami α wyznaczają współrzędne końca promienia R obróconego względem osi poziomej układu $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ w kierunku dodatnim (trygonometrycznym) o kąt $2\alpha = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Współrzędne końca promienia wynoszą $(110; 35)$, czyli $\sigma_\alpha = \overline{OC} + R \cdot \cos 2\alpha = 110$ MPa i $\tau_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha = 35$ MPa (rys. 1.10)

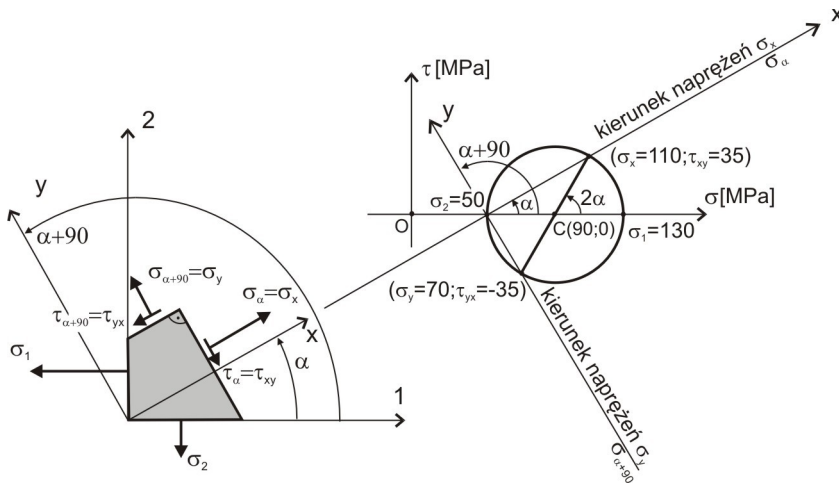


Rys. 1.10

- wartości naprężeń $\sigma_{\alpha+90}$ i $\tau_{\alpha+90}$, występujące w przekroju prostopadłym do przekroju, w którym wyznaczono wcześniej naprężenia σ_α i τ_α , wyznaczmy ze współrzędnych punktu przecięcia okręgu koła Mohra z prostą przechodzącą przez środek koła Mohra $(90; 0)$ i punkt o współrzędnych $(\sigma_\alpha = 110; \tau_\alpha = 35)$. W przedstawianym przykładzie otrzymamy punkt o współrzędnych $(70; -35)$, czyli $\sigma_{\alpha+90} = 70$ MPa i $\tau_{\alpha+90} = -35$ MPa (rys. 1.11)



Rys. 1.11



Rys. 1.12

Otrzymane stany naprężeń można przedstawić w formie graficznej jak na rys. 1.12. Zgodnie z przyjętą zasadą co do znaku naprężeń: dodatnia wartość naprężeń normalnych σ_α oznacza, że materiał jest rozciągany, a dodatnia wartość naprężeń stycznych τ_α oznacza, że naprężenia te próbują obrócić odcięty myślowo fragment elementu względem punktów leżących wewnątrz tej części w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Z geometrycznych zależności (rys. 1.12) wynika, że kierunek prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych (50;0) i (110;35) jest kierunkiem prostopadłym do powierzchni przekroju, w którym określamy stan naprężeń. Tak więc, jeśli po narysowaniu koła Mohra przeprowadzimy przez punkt o współrzędnych $(\sigma_2;0)$ prostą pod wymaganym kątem α , wówczas współrzędne punktu przecięcia prostej z okręgiem koła Mohra dają nam rozwiązanie zadania $\sigma_x = \sigma_\alpha = 110$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_\alpha = 35$ MPa)

Ze wzoru na naprężenia styczne τ_α :

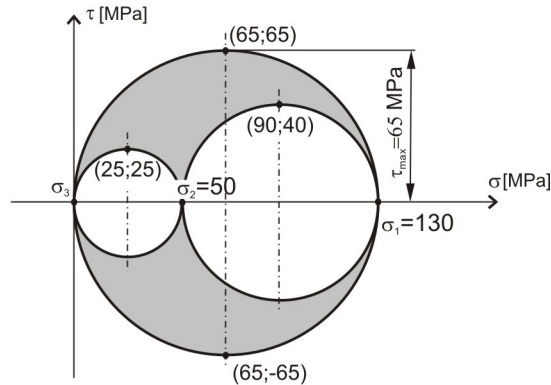
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha),$$

oraz z koła Mohra (rys. 1.12) widać, że w przekrojach prostopadłych do płaszczyzn wyznaczonych przez osie główne 1, 2 naprężenia styczne τ_α osiągają bezwzględną wartość maksymalną dla kąta $\alpha = \pm 45^\circ$ – wówczas:

$$|\tau|_{\max} = |\tau_{\alpha=\pm 45}| = \left| \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = \left| \pm \frac{130 - 50}{2} \right| = |\pm 40| \text{ MPa} = R,$$

τ_{\max} występujące w płaszczyźnie 1-2 co do bezwzględnej wartości równe jest promieniowi R koła Mohra.

W analizowanej kostce możemy rozpatrzyć pozostałe dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny 1-3 oraz 2-3 i dla każdej z nich zbudować koło Mohra. W efekcie otrzymamy trzy okręgi (rys. 1.13) – koła Mohra dla trójkierunkowego stanu naprężenia.



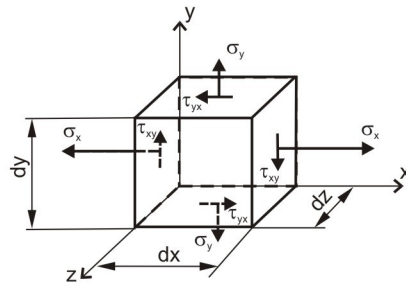
Rys. 1.13

Zacienione pole (rys. 1.13) wraz z liniami brzegowymi je otaczającymi zawiera punkty, których współrzędne odpowiadają stanowi naprężenia we wszystkich możliwych przekrojach analizowanej kostki. I tak na przykład, dla kostki maksymalne bezwzględne naprężenia styczne występują w przekroju prostokątnym do powierzchni 1-3, pod kątem $\alpha = \pm 45^\circ$ do kierunków głównych 1 i 3. Naprężenie τ_{\max} równe jest promieniowi największego koła Mohra i w omawianym przykładzie wynosi $|\pm 65|$ MPa.

Zadanie 1.2. Kostka prostokątna obciążona jest naprężeniami σ_x , τ_{xy} i σ_y , τ_{yx} w sposób widoczny na rys. 1.14:

- w przekroju prostokątnym do osi x : $\sigma_x = 120$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa, $\tau_{xz} = 0$;
- w przekroju prostokątnym do osi y : $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{yx} = -30$ MPa, $\tau_{yz} = 0$;
- w przekroju prostokątnym do osi z : $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$.

Wyznaczyć wartości naprężeń głównych oraz określić kąt, jaki tworzy oś maksymalnych naprężeń głównych z osią x . Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślną.



Rys. 1.14

Rozwiązanie. W omawianym przypadku mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia. Ponieważ $\tau_{zx} = 0$ i $\tau_{zy} = 0$, to σ_z jest trzecim naprężeniem głównym. Zagadnienie rozpatrzmy w płaszczyźnie xy , gdzie znajdują się naprężenia główne i ich kierunki. Rozwiązanie rozpoczniemy od metody wykreślniej. Przy sporządzaniu wykresu koła Mohra postępujemy kolejno w następujący sposób: